

# MÉCANIQUE DES ÉTATS CONDENSÉS DE LA MATIÈRE

JEAN-MARIE SOURIAU

*Fédération de Mécanique de Grenoble,  
Premier Séminaire International,  
19-21 Mai 1992*

## 1. INTRODUCTION

Les différentes versions de la science mécanique peuvent se classer par la *géométrie* que chacune implique pour l'espace et le temps ; géométrie qui se détermine par le groupe de covariance de la théorie.

Ainsi la mécanique newtonienne est covariante par le groupe de Galilée ; la relativité restreinte par le groupe de Lorentz-Poincaré ; la relativité générale par le groupe "lisse"<sup>(1)</sup>.

Il existe cependant une partie des énoncés de la mécanique dont la covariance appartient à un quatrième groupe – rarement envisagé : le *groupe affine*. Groupe qui figure dans le diagramme d'inclusion suivant :

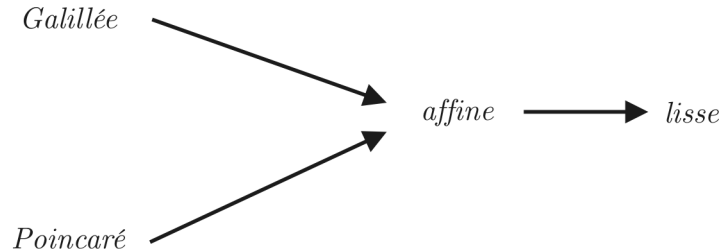


FIG. 1.

La "mécanique affine" est élémentaire, nous allons le voir ; et à cause de ce diagramme, chaque élément de mécanique affine appartient à la fois à la mécanique classique et à la mécanique relativiste.

De quels éléments s'agit-il ?

- pour la mécanique des systèmes : *points, particules, forces, masses, impulsions, spins, statique, dynamique, etc* ;
- en ce qui concerne les milieux continus : *contraintes, fils, coques, équilibre, équations d'Euler, etc.*

---

*Date:* Décembre 1992.

**Remerciements** – L'auteur les adresse à ceux qui l'ont aidé par leurs remarques, leurs discussions stimulantes, leurs idées originales et leurs précisions ; en particulier à B. CARTER, P. CASAL, C. DUVAL, H.H. FLICHE, G. GEYMONAT, J. J. MOREAU, R. VALID.

<sup>(1)</sup>le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps.

Mais il y a de grandes absences dans cette liste :

– *distances, longueurs, durées, analyse dimensionnelle...*

Ces absences même indiquent le statut méthodologique de cette mécanique affine : elle permet d'analyser le *premier niveau* d'un problème, d'écrire les équations d'équilibre ou de mouvement ; ce qui va lui échapper, ce sont les *lois de comportement*.

Lois de comportement qu'on établira donc dans un second stade où la symétrie affine sera brisée ; en choisissant à ce moment-là entre mécanique classique et mécanique relativiste.

Dans la liste affine, une autre absence remarquable : l'énergie. C'est grâce à cette absence que la mécanique affine traite aussi bien les phénomènes dissipatifs que les autres.

## 2. OBJETS AFFINES

Nous ne nous préoccupons pour commencer que de statique dans l'espace "ordinaire" à trois dimensions.

Choisissons des coordonnées cartésiennes  $x^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ <sup>(1)</sup> ; utilisons les notations tensorielles, qui permettent de distinguer les objets "contravariants" (indices supérieurs) et "covariants" (indices inférieurs). Les objets que nous allons utiliser sont classés dans le tableau suivant :

D ↓	A <i>glissement</i>	<i>torseur</i> $\Omega$	↑ D
D ↓	Z <i>pulsion</i>	<i>effort</i> F	↑ D
	G <i>déformation</i>	<i>présence</i> T	
cobord	↔ dualité	↔	bord

– Un *glissement* A sera constitué par des nombres

$$(A_i, A_{jk})$$

liés par la condition d'anti-symétrie :

$$A_{jk} + A_{kj} = 0$$
<sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Mais tout ce qui va suivre restera valable avec des "axes obliques", et avec des unités de mesure différentes sur chaque axe.

<sup>(2)</sup> On pourrait croire qu'il s'agit de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements euclidiens mais non, à cause de la variance des indices.

- Une *pulsion*  $Z$ , ce sera un champ de vecteurs covariants, défini dans tout l'espace, dont les composantes  $Z_j$  sont lisses<sup>(1)</sup>.
- Une *déformation*  $G$ , ce sera un champ lisse de tenseurs symétriques :

$$G_{jk} = G_{kj}.$$

Deux opérations, notées l'une et l'autre  $D$ , font correspondre une *pulsion*  $DA$  à un *glissement*  $A$  :

$$[DA]_j = A_j + A_{jk}x^k$$

et une déformation  $DZ$  à une *pulsion*  $Z$ <sup>(2)</sup> :

$$[DZ]_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j$$

Pour tout glissement  $A$ , la *pulsion*  $Z = DA$  vérifie  $DZ = 0$ , ce qui peut s'écrire

$$DDA = 0;$$

le *théorème de Killing* constitue une réciproque : toute *pulsion*  $Z$  telle que  $DZ = 0$  est de la forme  $DA$ .

La seconde colonne du tableau est en *dualité* avec la première :

- un *torseur*  $\Omega$ , ce sera une fonction linéaire des glissements<sup>(3)</sup>.
- un *effort*  $F$ , ce sera une fonctionnelle linéaire sur les pulsions : soit du type *mesure* (effort du "premier gradient"), soit du type *distribution* (second gradient ou davantage).
- une *présence*  $T$ , ce sera une fonctionnelle linéaire sur les déformations, mesure ou distribution selon les cas.

Alors l'opération linéaire  $D$  va agir aussi (à droite) sur les présences et les efforts :

- si  $T$  est une *présence*,  $F = TD$  est l'*effort* défini par

$$FZ = TDZ;$$

- si  $F$  est un *effort*,  $\Omega = FD$  est le *torseur* défini par

$$\Omega A = FDA.$$

On vérifie la règle  $TDD = 0$ ; la situation est celle que les mathématiciens appellent homologiecohomologie<sup>(4)</sup>; on peut utiliser la terminologie correspondante : l'opération  $D$ , agissant à droite, s'appellera "*bord*"; et à gauche "*cobord*".

<sup>(1)</sup>infiniment différentiables. Leurs dérivées partielles seront notées  $\partial_k Z_j$ .

<sup>(2)</sup>Du point de vue de la géométrie lisse, cette opération est une *connexion symétrique* elle caractérise la géométrie affine de l'espace.

<sup>(3)</sup>On peut donc le repérer par des composantes  $\Omega^i, \Omega^{jk}$  telles que  $\Omega A = \Omega^i A_i + \Omega^{jk} A_{jk}$ .

<sup>(4)</sup>Le théorème de Killing exprime la nullité d'une classe de cohomologie le problème d'homologie correspondant dépendra des hypothèses faites sur les efforts et les présences, comme nous le verrons plus loin.

## 3. STATIQUE

**Efforts mécaniques.** Un point  $x$  subit une force  $\vec{F}$ . La mécanique classique nous enseigne à lui associer un "travail virtuel" dans un "déplacement virtuel" du point  $x$ . Notons  $\vec{\Xi}$  ce déplacement; ce "travail", c'est le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{\Xi}$ , qui peut aussi s'écrire en notation tensorielle :

$$F^j \Xi_j$$

Oui, mais comment exprimer que la force  $\vec{F}$  est appliquée au point  $x$ ? En utilisant une *pulsion*  $Z$ , et en supposant que  $\vec{\Xi}$  c'est la valeur de  $Z$  au point  $x$ .

Posons :

$$FZ = F^j Z_j(x)$$

et nous aurons caractérisé la "force appliquée" par un *effort*  $F$ <sup>(1)</sup>.

Un "système de forces"? Il se caractérise par *un seul effort*  $F$ , la somme de ceux qui sont associés à chacune des forces<sup>(2)</sup>.

**Action et réaction.** Comme Newton l'a affirmé, des points ne peuvent interagir que par couples de forces opposées et parallèles à la droite qui joint les points d'application.

Ces forces d'interactions constituent un *effort*  $F$ ; comment constater sur la fonctionnelle  $F$  cette égalité de l'action et de la réaction? Simplement par la nullité de  $FZ$  pour certains choix de  $Z$ : par exemple si  $Z(x)$  est un vecteur *constant*. Plus précisément, pour les *pulsions*  $Z$  qui sont associées à un *glissement*  $A$  par la relation  $Z = DA$ . Ainsi le principe s'écrit :

$$Z = DA \Rightarrow FZ = 0$$

ou, plus brièvement :

$$FD = 0$$

condition qui exprime donc la *nullité d'un torseur*<sup>(3)</sup>.

Mais d'après le théorème de Killing,  $Z = DA$  peut aussi s'écrire  $DZ = 0$ ; si bien que la condition  $(Z = DA) \Rightarrow (FZ = 0)$  peut encore s'écrire :

$$DZ = 0 \Rightarrow FZ = 0;$$

condition que l'algèbre linéaire nous permet d'écrire :

$$F = TD$$

$T$  étant une fonctionnelle linéaire – un *multiplicateur de Lagrange*.

<sup>(1)</sup>Les choix de variance que nous avons faits permettent ainsi de ne pas utiliser le "produit scalaire", donc de rester dans la géométrie affine.

<sup>(2)</sup> $F$  est une mesure, dont le support est l'ensemble des points d'application des forces.

<sup>(3)</sup>Rien d'étonnant :  $FD$ , c'est le torseur usuellement attaché au système de forces  $F$ .

**Présence physique.** Ainsi peut s'exprimer le "principe de Newton" pour un effort  $F$  – en faisant intervenir un objet nouveau  $T$ .

Mais  $T$  n'est pas entièrement déterminé par cette équation<sup>(1)</sup>; on peut donc lui assigner quelque condition supplémentaire. Choisissons de prendre pour  $T$  une *présence*, au sens précis du paragraphe précédent.

Comme nous allons le constater, cette présence  $T$  permettra de déterminer *comment* les points agissent les uns sur les autres, de donner une expression plus intime et plus concrète de "l'action à distance" qui crée les forces newtoniennes.

Parlons maintenant de *statique* : le "principe des travaux virtuels", condition d'équilibre, s'écrivait :

$$FZ = 0 \quad \text{pour tout } Z$$

c'est-à-dire

$$F = 0;$$

puisque

$$F = TD :$$

il deviendra désormais :

$$\boxed{TD = 0.}$$

À quoi bon, ce jeu d'écriture ?

Par exemple à traiter des systèmes qui pourraient s'étendre à l'infini dans l'espace – systèmes pour lesquels le principe de Newton initial ne peut plus s'exprimer directement. Comment ? en convenant que ce sont les pulsions  $Z$  et les déformations  $G$  qui sont nulles en dehors d'une région bornée de l'espace ; restriction sur les variables "co-homologiques" (tableau 1), extension des variables "homologiques" en dualité<sup>(2)</sup>.

Mais aussi à s'occuper de la matière sous ses aspects continus. Nous allons examiner comment décrire tous ces aspects par une présence  $T$ , vérifiant la condition d'équilibre  $TD = 0$ .

**Contrainte.** Premier exemple de présence.

On suppose données, en chaque point de l'espace, des grandeurs  $T^{jk}$ ; l'intégrale triple

$$TG = \int \frac{1}{2} T^{jk} G_{jk} dx dy dz$$

où la déformation  $G$  joue le rôle de "variable d'essai", définit une présence  $T$ .

<sup>(1)</sup> $T$  est une fonctionnelle sur les déformations  $G$  : la formule ne détermine  $TG$  que si  $G = DZ$ ;  $T$  ne serait déterminée que si toute déformation  $G$  se mettait sous la forme  $DZ$ . Ce n'est pas le cas,  $G$  doit vérifier une "condition de compatibilité", qui figure dans l'annexe 1.

<sup>(2)</sup>La cohomologie aussi est modifiée ; en particulier sa première ligne s'annule, parce que le seul glissement  $A$  tel que la pulsion  $DA$  ait un support compact, c'est  $A = 0$ .

Le tenseur  $T^{jk}$  apparaît ainsi comme "présence spécifique", puisque mis en facteur de "l'élément de volume"  $dxdydz$ , que nous noterons simplement  $vol^{(1)}$ .

On peut sans perte de généralité supposer que  $T^{jk} = T^{kj}$  puisque  $G_{jk} = G_{kj}$ . Alors l'effort associé à cette présence,  $F = TD$ , est donné par :

$$FZ = \int T^{jk} \partial_j Z_k vol$$

Or l'intégrande  $T^{jk} \partial_j Z_k vol$ , à une divergence près dont l'intégrale s'annule, s'écrit :

$$- \left[ \partial_j T^{jk} \right] Z_k vol,$$

ce qui montre que la présence  $T$  implique une *force spécifique* :

$$\mathcal{F}^k = -\partial_j T^{jk};$$

on peut donc identifier la *présence spécifique*  $T^{jk}$  avec le "*tenseur de contrainte*"<sup>(2)</sup>.

**Contrainte de la gravitation.** Cas particulier.

Il existe un "tenseur de contrainte" associé à la *gravitation newtonienne*<sup>(3)</sup>; il est défini par la formule suivante :

$$T^{jk} = \frac{2g^j g^k - |g|^2 \delta^{jk}}{8\pi G}$$

où  $G$  désigne la constante de Newton et  $g^j$  l'accélération de la pesanteur. La force associée  $-\partial_j T^{jk}$ , c'est très précisément la force gravitationnelle spécifique  $pg^k$ <sup>(4)</sup>.

Une propriété intéressante de ce tenseur  $T^{jk}$  : sa trace  $\frac{-|g|^2}{8\pi G}$  peut s'interpréter comme énergie gravitationnelle spécifique ; son intégrale dans tout l'espace indique l'énergie qu'il faudrait dépenser pour faire sauter la Terre, celle qui a été dissipée en chaleur dans le processus d'accrétion qui lui a donné naissance.

<sup>(1)</sup>Vis à vis du groupe affina  $T^{jk}$  n'est donc pas réellement un tenseur, mais une "densité tensorielle".

<sup>(2)</sup>Dans le cas d'un tenseur de contrainte discontinu sur une surface, une force "aéro-laire" apparaît sur cette surface, qui est donnée en fonction de la discontinuité par  $\mathcal{F}^k = \Delta T^{jk} N_j$ ,  $N_j$  étant le vecteur normal unitaire. Simple conséquence de la formule de Stokes, qui fournit l'interprétation standard du tenseur de contrainte.

<sup>(3)</sup>Le phénomène gravitation est ici défini par un vecteur  $g^j$ ; la formule qui lui associe un "tenseur de contrainte" apparaît comme une "loi de comportement"; loi qui sort du cadre de la *mécanique affine*, puisqu'il y figure le tenseur métrique  $\delta^{jk}$ . C'est pourquoi, dans ce paragraphe, on voit apparaître des "objets non affines", comme l'énergie.

<sup>(4)</sup> $\rho$  = masse spécifique. Ce résultat utilise la loi de Poisson  $\text{div } g = -4\pi G\rho$  et la relation  $\text{rot } g = 0$ .

Mais il est un peu effrayant, si l'on y songe, ce tenseur gravitationnel : il nous impose verticalement une pression épouvantable<sup>(1)</sup> ; et horizontalement la même pression, mais avec un signe opposé ; une aspiration horizontale.

Pourtant nous n'avons pas l'impression de vivre dans un environnement aussi écrasant comment se fait-il que la résultante de la densité de force  $-\partial_j T^{jk}$  appliquée à notre corps se réduise seulement à *notre poids* ? simplement parce que nous sommes quasi-transparents au champ de gravitation<sup>(2)</sup>.

**Règle de localisation.** Pour éviter de telles difficultés d'interprétation, un moyen simple : laissons de côté ici les actions à longue distance (gravitationnelles et électromagnétiques) ; ne considérons, dans le milieu à décrire, que les actions à *courte portée*.

Physiquement, il s'agit d'une approximation : nous schématisons les forces internes de la matière (moléculaires par exemple) par des forces qui ne sortent pas de cette matière, donc à *portée nulle*. Ce paradigme de la mécanique des milieux continus est une approximation *macroscopique*, puisque il impose de négliger la distance à laquelle ces forces se font sentir.

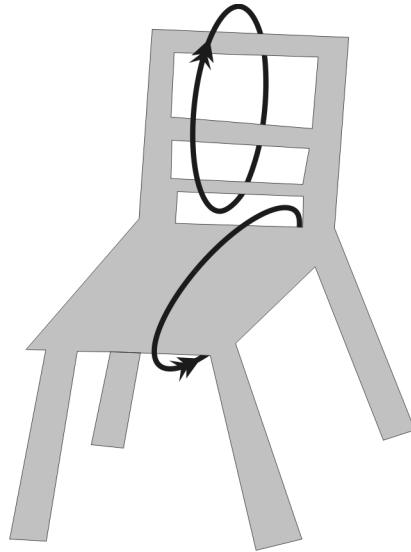


FIG. 2.

<sup>(1)</sup>Cette pression est pratiquement la pression moyenne à l'intérieur de La Terre, celle qui règne à 1300 Km sous nos pieds. Ce n'est pas par hasard que cette pression moyenne intervient ici voir l'annexe A.

<sup>(2)</sup>Les efforts dont nous venons de parler, ils ne se manifesteraient qu'à la traversée d'une surface imperméable à la gravitation. Selon H.G. WELLS [*The first men in the Moon*, 1901], la gravitation ne se fait pas sentir dans la boîte de l'inventeur Cavor ; alors toutes les faces de cette boîte doivent supporter, dans un sens ou dans l'autre, une pression de cinq cent mille atmosphères,...

**Équilibre d'un milieu continu.** Décrivons ainsi, sans sortir de la statique affine, un exemple d'équilibre : celui d'un milieu continu dont la présence est définie par une contrainte  $T^{jk}$  ; milieu limité par une surface  $\Sigma$  : l'extérieur est vide, la contrainte y est nulle.

La condition d'équilibre  $TD = 0$  s'exprime d'une part par l'équation  $\partial_j T^{jk} = 0$  à l'intérieur de la matière, d'autre part par la nullité de  $T^{jk}N_j$  sur la surface,  $N_j$  désignant un vecteur normal à  $\Sigma$ .

Comment reconnaître dans ces conditions la raison même invoquée pour les établir : l'égalité de l'action et de la réaction ?

Par l'interprétation suivante : choisissons :

- (1) un glissement  $A$  :
- (2) un "lacet" (courbe fermée orientée) dans le vide complémentaire de l'objet ;
- (3) une surface orientée admettant ce lacet comme bord ; surface qui pourra couper l'objet.

Soit  $Z$  la pulsion  $DA$ . Il résulte de la condition  $TD = 0$  que nous venons de détailler que le flux du vecteur  $T^{jk}Z_k$  à travers cette surface ne variera pas lorsque on fera varier continûment la surface – pourvu que son bord reste dans le vide.

Ce flux sera donc une fonction de la classe d'homotopie du lacet, et une fonction additive sur le groupe d'homotopie<sup>(1)</sup>. Fonction à valeurs réelles, mais qui dépend linéairement du choix du glissement  $A$  ; comme fonctionnelle sur  $A$ , sa valeur est donc un *torseur*<sup>(2)</sup>.

Nous avons donc construit un morphisme, dans l'espace additif des torseurs, du groupe d'homotopie du vide complémentaire de l'objet ; morphisme qu'on peut appeler *arc-boutement* : il définit le système des torseurs transportés par chacune des parties de l'objet<sup>(3)</sup>.

Notre dessin représente une chaise, mais une chaise qui est libre dans l'espace vide – ce qui n'a rien d'insolite puisqu'au stade actuel nous avons convenu de négliger la pesanteur.

Supposons cependant qu'elle soit en contact avec autre chose – par exemple que ses pieds soit collés sur le sol. Que devient l'analyse précédente ?

Elle reste valable, à condition de remplacer l'objet "chaise" par l'objet "chaise + sol". Le contact avec le sol change d'une part l'équilibre de la chaise, d'autre part la topologie du vide mais la nouvelle répartition des torseurs est encore définie par le nouvel arc-boutement. Ainsi le torseur transporté par chacun des pieds n'est plus nécessairement nul, et peut se

<sup>(1)</sup>Le flux est additif pour l'opération de composition des lacets ; et c'est cette composition qui définit le groupe d'homotopie. La figure représente deux cycles homotopes (tant que les pieds de la chaise ne sont pas posés par terre).

<sup>(2)</sup>Exemple : ce qu'on lit sur la figure, c'est un système de deux torseurs égaux, supportés l'un par les trois barreaux du dossier, l'autre par la planche constituant le siège.

<sup>(3)</sup>Dans les cathédrales gothiques, c'est le rôle des *arcs-boutants* de transmettre de tels arc-boutements.



calculer par une intégrale de surface calculée uniquement à l'intérieur du sol.

**Toiles d'araignées et charpentes.** La règle de localisation ne s'applique pas seulement au cas précédent : nous pouvons aussi décrire les efforts dans des états plus "condensés" de la matière. Même dans le cas de matière *qui n'occupe qu'un seul point de l'espace* (voir l'annexe A).

Ici, étudions une matière "filiforme", localisée sur une courbe.

Il suffit de choisir sur cette courbe un tenseur symétrique  $\theta^{jk}$  et de caractériser la présence  $T$  par une intégrale simple :

$$TG = \int \theta^{jk} G_{jk} ds$$

$ds$  désignant l'élément d'arc.

La condition d'équilibre  $TD = 0$ , c'est la nullité de cette intégrale quand  $G_{jk} = \partial_j Z_k$ ,  $Z$  étant choisi arbitrairement. Détaillons-la.

On commence par inventer une fonction lisse  $u$  nulle sur la courbe, et on multiplie une pulsion quelconque  $Z$  par  $u$ . Alors la nullité de l'intégrale implique en tout point de la courbe la condition :

$$\theta^{jk} \partial_j u = 0;$$

or en ce point  $\partial_j u$  est un vecteur orthogonal à la courbe, quelconque ; cette propriété et la symétrie du tenseur impliquent :

$$\theta^{jk} = -\theta U^j U^k,$$

$U$  désignant le vecteur unitaire tangent  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\theta$  un nombre. Pourquoi le signe  $-$  ? simple convention.

Cette condition est nécessaire pour l'équilibre, mais pas suffisante : une intégration par parties montre qu'il faut aussi

$$\frac{d}{ds} [\theta U] = 0,$$

ce qui implique la *constance du nombre*  $\theta$  ; et si  $\theta$  n'est pas nul, la *rectilinéarité* du fil.

Mais ce n'est pas tout : si le fil est limité dans l'espace, l'effort associé à cette présence  $T$  comporte encore deux forces, exercées aux deux extrémités du fil. Nécessairement opposées, de même intensité, et parallèles au fil, puisque nous savons que l'égalité de l'action et de la réaction est automatiquement vérifiée par cet effort.

Et la mesure de ces forces, c'est  $\theta$ . Interprétation évidente :  $\theta$ , c'est la *tension* du fil, avec la convention de signe qui rend la tension positive dans le cas des fils d'araignée. Un fil fini ne peut donc être en équilibre que s'il est détendu ou accroché.

On peut aussi imaginer divers bouts de fil accrochés les uns aux autres, par exemple une toile d'araignée. La condition d'équilibre de cette toile, définie par la règle de localisation, s'obtient en supposant que la présence  $T$  est supportée par la toile ; alors la condition  $TD = 0$  implique, en chaque

nœud, la nullité de la résultante des forces concourantes  $\theta U$  : la règle de *composition des forces* est ainsi "démontrée" dans le cadre de ce modèle<sup>(1)</sup>

Nous avons donc tout ce qu'il faut pour écrire l'équilibre d'une toile d'araignée. Tout ? Pas exactement. Les *lois de l'équilibre* que nous venons d'écrire doivent être complétées par des "*équations d'état*" ou "*lois de comportement*" caractéristiques des fils utilisés : si on remplaçait certains fils d'araignée par des cordes de rappel, la toile serait déséquilibrée...

Ces lois de comportement statiques expriment, en principe, la présence  $T$  à l'équilibre en fonction de l'état du fil. Qu'est-ce exactement que l'état, et comment se formulent ces lois ? C'est tout le savoir-faire des spécialistes – et des araignées. Et cela sort du cadre de la mécanique affine.

On peut étendre la statique de la matière filiforme en prenant comme présence  $T$  non plus une mesure, mais une distribution ; il suffit de poser a priori<sup>(2)</sup> :

$$TG = \int \frac{1}{2} \left[ \theta^{jk} G_{jk} + \Sigma^{jkl} \partial_l G_{jk} \right] ds$$

Le calcul de la condition d'équilibre  $TD = 0$ <sup>(3)</sup> conduit alors aux résultats suivants : il existe en chaque point de la courbe un vecteur  $P^j$ , un tenseur *antisymétrique*  $S^{jk}$ , tels que :

$$\begin{aligned} \theta^{jk} &= U^j P^k + U^k P^j \\ \Sigma^{jkl} &= U^j S^{kl} + U^k S^{jl} \end{aligned}$$

et les équations d'équilibre sur la courbe expriment la constance, le long de la courbe, des six grandeurs suivantes<sup>(4)</sup> :


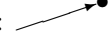
$$\begin{cases} P^j \\ P^j x^k - P^k x^j + S^{jk} \end{cases}$$

qui sont les composantes du *torseur* transporté, avec l'orientation caractérisée par le vecteur  $U$ .

Le terme  $S^{jk}$  permet à l'objet de ne plus être rectiligne : tige, barre, poutre ou ressort sous tension possèdent des équilibres courbés et tordus.

L'équation  $TD = 0$  implique aussi les conditions aux limites qui régissent les assemblages de tels objets. La façon la plus directe de les écrire, c'est d'utiliser les *torseurs transportés* : leur description globale, c'est encore un arc-boutement.

<sup>(1)</sup>Dans les années 1850, FREDERIC REECH et son école ("l'École du Fil") professaient que la force est une notion première, et que nous la concevons à partir de l'expérience du fil tendu. La preuve ? la flèche que nous dessinons pour représenter une force appliquée en

un point, nous la faisons tirer comme un fil :  mais pas pousser : .

<sup>(2)</sup>Les deux cas envisagés ici sont ceux du "premier gradient", du "second gradient".

<sup>(3)</sup>Détaillé dans l'annexe B.

<sup>(4)</sup>Le cas précédent est inclus dans cette description, avec  $S = 0, P = -\theta U$ .

**Membranes, coques, bulles, parois, coquilles...** La statique d'une membrane ou d'une coque s'obtient en étudiant une présence supportée par une surface : c'est un cas particulier de la théorie générale développée dans l'annexe B.

Il n'est pas question de détailler ici des exemples ; contentons-nous d'une remarque fondamentale.

Une propriété intéressante des coques, milieux matériels de dimension 2, c'est de posséder des équilibres lorsqu'elles sont en contact avec des milieux de dimension 3 ou 1 ; les équations d'équilibre dans cette situation s'obtiennent par la même méthode.

Ainsi nous savons comment la coquille d'un œuf peut résister à une pression extérieure, et aussi à la traction d'un fil tendu sur une portion de sa surface.

Paradoxe : un objet tridimensionnel décrit par un tenseur de contrainte  $T^{jk}$  n'offre aucune résistance au fil à couper le beurre – pourvu qu'il soit suffisamment fin...<sup>(1)</sup>.

Pour en donner un modèle réaliste, il est donc nécessaire de faire intervenir aussi des termes superficiels dans sa *présence* ; de les décrire comme un œuf, par un assemblage milieu continu + coque.

Pourtant on n'observe pas de carapace autour des cailloux. Ce modèle serait-il un simple artifice empirique ?

Remarquons que les propriétés *microscopiques* d'un milieu continu se modifient lorsqu'on s'approche de la surface extérieure – à une distance de l'ordre de grandeur de la "portée" des forces internes : *effet de bord*.

La mécanique des milieux continus, résolument *macroscopique*, a choisi de négliger une telle épaisseur : elle doit donc concentrer l'effet de bord sur la surface frontière même.

Le phénomène est bien connu dans le cas de la surface libre d'un liquide : il s'agit de la *tension superficielle*, qui permet notamment de modéliser des bulles en équilibre.

Dans le cas des solides durs, la prise en compte d'une *coquille* superficielle, capable de tension et de rigidité, semble donc à la fois légitime et indispensable à une description correcte. Mais il faut être capable d'établir les lois de comportement qui la régissent<sup>(2)</sup>.

#### 4. DYNAMIQUE

La règle de D'ALEMBERT pour traiter la dynamique, c'est d'insérer dans la statique des "forces d'inertie".

<sup>(1)</sup>C'est pour pallier à des difficultés de ce type qu'on a recours à quelques règles empiriques – comme le principe de Saint-Venant. L'origine de la difficulté, c'est que l'équilibre simultané de deux milieux continus de dimensions différentes, décrit par une condition de type  $TD = 0$ , fait intervenir une intégration par parties. À cause de cela, il n'est possible que si la différence des dimensions est égale à 1.

<sup>(2)</sup>L'expérience montre que la dureté et la solidité d'une pièce métallique "brute de fonderie" sont profondément modifiées si on la lime.

Ici ce sera inutile. Contentons-nous de prendre en compte le temps comme quatrième coordonnée :  $t = x^4$  <sup>(1)</sup> et de remettre en œuvre le formalisme précédent : pulsions  $Z_k$ , déformations  $G_{jk}$  seront quadri-dimensionnelles, concerneront l'espace-temps – ainsi que l'opération  $D$ ; la dualité définira la nouvelle présence  $T$ ; et l'équation

$$TD = 0$$

passera du statut d'équation d'équilibre à celui d'équation du mouvement.

La question qui se pose alors, c'est l'interprétation de la nouvelle présence  $T$  – et, techniquement, sa construction.

Examinons ces questions sur quelques cas particuliers.

**Naissance de la masse.** Commençons par le cas d'un point matériel, matière supportée par une courbe d'espace-temps, la *ligne d'univers* du point.

Le calcul de l'équation du mouvement d'un point est exactement parallèle à celui de l'équation d'équilibre d'un fil; il s'exprime par la constance des dix composantes du *quadri-torseur transporté*. Celui-ci est caractérisé par un seul paramètre  $m$ ; alors toutes ses composantes s'expriment au moyen de la *vitesse*  $V^j = \frac{dx^j}{dt}$  :

$$\begin{array}{c} \boxed{m} \\ \boxed{mV^j} \\ \boxed{m [x^j V^k - x^k V^j]} \\ \boxed{m [x^j - V^j t]} \end{array}$$

La conservation de ces dix grandeurs implique évidemment la "loi du mouvement" : celui-ci est rectiligne et uniforme.

Et la loi des collisions ? Elles s'obtiennent par le calcul même qui impliquait la "composition des forces" dans les nœuds des toiles d'araignée. Le résultat peut s'exprimer par la *conservation*, lors du choc, de la *somme des torseurs* associés à chaque particule. Pour toute collision, mais aussi pour toute désintégration.

L'expérience permet de vérifier ces dix lois de conservation et de désintégration – en *mesurant* les termes qui y interviennent. Ainsi le coefficient  $m$ , c'est la masse <sup>(2)</sup> : même valeur avant et après le choc pour la somme des masses  $m$ , des *impulsions*  $mV^j$ , des *moments cinétiques*  $m[x^j V^k - x^k V^j]$ , et des  $m[x^j - V^j t]$ , loi qui assure le mouvement rectiligne uniforme du *centre de masse*.

Ainsi l'*inertie* apparaît-elle ici "spontanément" – au même niveau primitif que la *force*. Masse d'une particule, tension d'un fil ont le même statut géométrique.

<sup>(1)</sup>Pour éviter toute confusion, nous noterons en grec les indices allant de 1 à 4.

<sup>(2)</sup>Et pas du tout l'énergie – tant qu'on n'aborde pas la Relativité.

Et recèlent l'une et l'autre une ambiguïté équivalente : une loi de comportement était nécessaire pour déterminer les tensions dans les toiles d'araignées ; une loi de comportement sera nécessaire pour déterminer cette "masse" dans les divers mouvements possibles d'une même particule. Deux choix nous sont proposés : soit une masse  $m = m_0$  indépendante de la vitesse – c'est le choix de la *mécanique classique* ; soit celui de la *mécanique relativiste* :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'un de ces choix étant fait, conforté par l'expérience, il détermine simultanément toutes les composantes du tenseur transporté : impulsion, moment cinétique, etc.

Peut-on traiter de même les *particules à spin* ?

Il suffit d'utiliser une présence-distribution, comme dans le cas des tiges et des poutres. Un nouveau quadri-tenseur antisymétrique  $S^{\lambda\mu}$  intervient<sup>(1)</sup>. Une nouvelle *loi de comportement* sera nécessaire dans le cas d'une particule telle que l'électron, il conviendra d'écrire<sup>(2)</sup> :

$$S^{\lambda 4} = 0.$$

Alors la seule modification intervenant dans les constantes du mouvement concerne le *moment cinétique* : au moment cinétique *orbital* que nous venons d'écrire, il faut ajouter  $S^{jk}$ , qui s'interprétera donc comme *moment cinétique propre*. Et compte tenu de l'ensemble des grandeurs conservées, ce "*spin*" sera aussi une constante du mouvement<sup>(3)</sup>.

**Cordes vibrantes.** Une présence un peu moins condensée : la matière est répartie sur une courbe en mouvement, c'est-à-dire sur une surface de l'espace-temps ; équations du mouvement calquées sur les équations d'équilibre des membranes.

La description classique des cordes s'insère dans cette théorie générale : on adopte comme paramètres le temps  $t$  et une abscisse arbitraire  $s$  dans un *état de référence*<sup>(4)</sup> ; la présence est définie au moyen de deux grandeurs  $\rho$  et

(1) Annexe B.

(2) Loi de comportement "classique" ; la loi de comportement relativiste correspondante, c'est  $S^{\lambda 4} = \frac{S^{\lambda j} v^k \delta_{jk}}{c^2}$ .

(3) Par conséquent le mouvement reste rectiligne uniforme, la particule est indemne de tout "tremblement". L'objet correspondant au niveau tridimensionnel, c'est le *fil de torsion* des vieux galvanomètres, qui est censé rester rectiligne quand on le tord.

(4) Chaque "molécule" de la corde est donc caractérisée par une équation  $s = Cte$ . La théorie générale de l'annexe B implique deux vecteurs  ${}^\alpha P$ , combinaisons linéaires des deux vecteurs tangents  ${}^\beta U$  ; ici on suppose la nullité du terme rectangle, c'est-à-dire le parallélisme de chaque quadri-vecteur  ${}^\alpha P$  au vecteur  ${}^\alpha U$  correspondant ; loi de comportement des cordes classiques – abandonnée dans les théories exotiques des cordes. Une deuxième loi est nécessaire pour obtenir un modèle déterministe ; dans le modèle "élastique", on choisit une équation d'état reliant l'abscisse de référence  $s$ , la tension  $\theta$  et l'allongement ponctuel instantané.

$\theta$ , interprétables l'une comme masse spécifique relativement au paramètre  $s$ , l'autre comme tension de la corde. Les équations du mouvement données par la condition  $TD = 0$  s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \rho \vec{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial s} [\theta \vec{T}]$$

$\vec{\Gamma}$  désignant l'accélération de la molécule,  $\vec{T}$  le vecteur unitaire tangent à la corde à l'instant  $t$ . *Conservation de la masse et loi de la dynamique* sont ainsi inscrites dans le modèle.

**Dynamique des milieux continus.** La présence d'un milieu continu sera caractérisée par un quadri-tenseur  $T^{\lambda\mu}$ , solution des *équations universelles* :

$$\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0.$$

Comment lui associer un quadri-tenseur transporté ? il va falloir adapter la notion tri-dimensionnelle d'arc-hautement.

À chaque *quadri-glisserment*  $A$ , on doit associer le flux conservé du quadri-vecteur  $T^{\lambda\mu} DA_\mu$ , sur une hyper-surface ; hyper-surface de dimension 3 dont le bord ne sera plus un "lacet", mais une *surface fermée de l'espace-temps*, surface située dans le vide.

Il sera permis de faire pour cette surface un choix "instantané", c'est-à-dire de la prendre dans une hyper-surface d'équation  $t = Cte$ . Alors le flux sera l'intégrale à l'intérieur de cette surface mobile de la grandeur  $T^{4\lambda} DA_\lambda$  et il sera indépendant de la date  $t$ . Les divers choix possibles pour  $A$  définiront les dix grandeurs conservées – dont nous connaissons l'interprétation.

Ceci permet d'interpréter les composantes  $T^{4\lambda}$  :  $\rho = T^{44}$  comme *masse spécifique*, et  $T^{4j}$  comme *impulsion spécifique*.

Mais comment interpréter les composante spatiales  $T^{jk}$  ?

On peut recourir à la *mécanique statistique*. Prenons l'exemple le plus simple, la *théorie cinétique d'un gaz mono-atomique*. Ce gaz est supposé constitué d'un grand nombre de points matériels identiques, libres entre deux collisions éventuelles<sup>(1)</sup>. On le modélise en traitant les mouvements de ces atomes comme des *variables aléatoires*, et en supposant que la présence du gaz est la *valeur moyenne* de la présence des atomes, que nous venons de décrire.

La définition de la présence comme *fonctionnelle linéaire*, c'est exactement ce qu'il faut pour définir rigoureusement une telle valeur moyenne.

Avec une loi de probabilité complètement continue sur l'espace des mouvements<sup>(2)</sup>, on trouve effectivement un tenseur  $T^{\lambda\mu}$ , automatiquement solution de l'équation  $\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$  (par linéarité), et dont on peut calculer tous les

<sup>(1)</sup>L'analyse précédente indique que ces collisions ne jouent aucun rôle dans le bilan – pourvu que l'on puisse négliger le volume des atomes.

<sup>(2)</sup>Si ce langage vous chagrine, dites "solution normalisée de l'équation de Liouville sur l'espace de phases".

éléments. Alors la *valeur moyenne*  $V$  de la *vitesse* au point  $x^j$  est donnée par la formule :

$$\rho V^j = T^{4j}$$

$\rho$  désignant toujours la masse spécifique  $T^{44}$  ;  $T^{jk}$  est le produit par  $\rho$  du *moment du second ordre* de la vitesse, ce qui permet d'écrire

$$T^{jk} = \rho V^j V^k + \theta^{jk}$$

$\theta^{jk}$  étant le produit par  $\rho$  de la *variance de la vitesse*. On sait que  $\theta^{jk}$  peut s'interpréter comme *contrainte* du milieu<sup>(1)</sup>, d'où l'interprétation cherchée,  $\rho V^j V^k$  étant promue au rôle de *contrainte dynamique*.

Abandonnons maintenant ce modèle particulier, mais utilisons les nouvelles variables qu'il nous a permis d'interpréter pour transcrire les *équations universelles*  $\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$ . Elles deviennent :

$$\partial_j [\rho V^j] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho \Gamma^k + \partial_j \theta^{jk} = 0$$

$\Gamma$  désignant l'*accélération* associée au champ de vitesses  $V$ <sup>(2)</sup> : on reconnaît les *équations d'Euler* des milieux continus.

Ainsi ces équations appartiennent au premier niveau : ce n'est donc que par un choix subjectif de variables qu'on peut y lire la distinction entre temps et espace, l'apparition de "forces d'inertie", etc<sup>(3)</sup>.

## ANNEXE A. ÉQUILIBRES PONCTUELS

Quelques calculs de dérivation donnent une condition nécessaire pour qu'une déformation  $G$  dérive d'une pulsion  $Z$  selon la formule ci-dessus  $G_{jk} = (DZ)_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j$ . Cette *condition de compatibilité*, c'est la nullité du tenseur  $R$  :

$$R_{jk,lm} = \partial_j \partial_l G_{km} - \partial_j \partial_m G_{kl} + \partial_k \partial_m G_{jl} - \partial_k \partial_l G_{jm}$$

<sup>(1)</sup>L'expérimentation sur les gaz chauds confirme bien la relation obtenue ici entre contrainte d'une part, tenseur-variance de la vitesse individuelle des atomes de l'autre ; la variance des composantes de la vitesse se mesure par effet Doppler-Fizeau (élargissement de raies) ; le résultat est en accord avec la loi de Maxwell-Boltzmann pour la répartition des vitesses, qui implique une contrainte scalaire – simple pression.

<sup>(2)</sup> $\Gamma^k = \frac{\partial V^k}{\partial t} + V^j \partial_j V^k$ .

<sup>(3)</sup>Elles sont d'ailleurs commune à la mécanique classique et à la mécanique relativiste.

tenseur qui possède dans tous les cas les symétries suivantes :

$$R_{kj,lm} + R_{jk,lm} = 0;$$

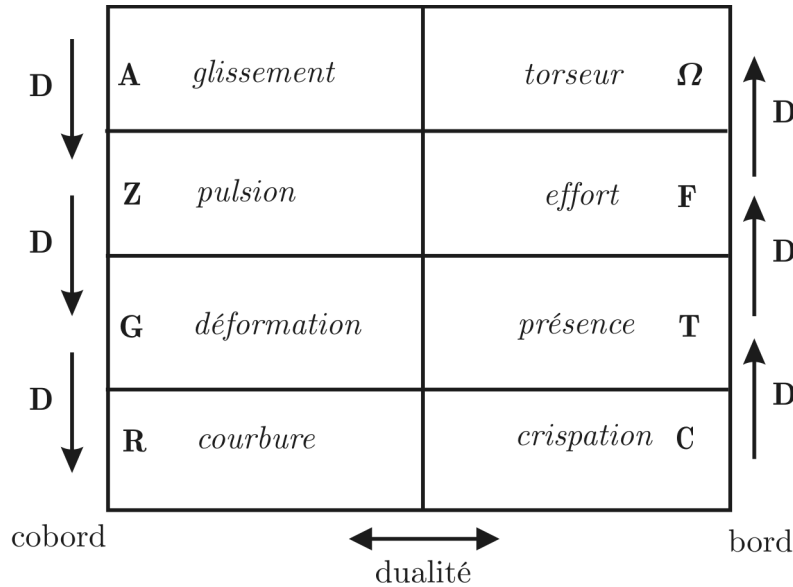
$$R_{jk,ml} + R_{jk,lm} = 0;$$

$$R_{jk,lm} + R_{kl,jm} + R_{lj,km} = 0;$$

$$R_{jk,lm} - R_{lm,jk} = 0$$

et que nous appellerons *courbure*<sup>(1)</sup>.

Ceci va permettre de prolonger le diagramme cohomologique établi dans l'introduction : il suffira de considérer cette courbure  $R$  comme le cobord  $DG$  de la déformation  $G$  :



par dualité, on définira le bord  $CD$  d'une fonctionnelle linéaire  $C$  sur les courbures – d'une *crispation*.

Rien de plus facile que de construire une crispation  $C$  supportée par un point  $x_0$  : il suffit de choisir arbitrairement des nombres  $C^{jk,lm}$  et de poser :

$$CR = \frac{1}{4} C^{jk,lm} R_{jk,lm}(x_0)$$

Compte tenu des symétries des composantes  $R_{jk,lm}$ , on peut sans perte de généralité attribuer aux composantes  $C^{jk,lm}$  la symétrie duale. Alors le bord  $T = CD$  peut se mettre sous la forme :

$$TG = \frac{1}{2} A^{jk,lm} [\partial_j \partial_l G_{km}] (x_0)$$

avec :

$$A^{jk,lm} = C^{jl,km} + C^{kl,jm}$$

<sup>(1)</sup>Ces symétries sont celles du "tenseur de courbure" de Riemann-Christoffel. Courbure virtuelle de l'espace, ici.



ce nouveau tenseur  $A$  possède les symétries suivantes :

$$A^{jk,lm} - A^{kj,lm} = 0;$$

$$A^{jk,ml} + A^{jk,lm} = 0;$$

$$A^{jk,lm} + A^{kl,jm} + A^{lj,km} = 0;$$

$$A^{jk,lm} - A^{lm,jk} = 0$$

compte tenu de ces symétries, la fonctionnelle  $T$ , c'est une présence en équilibre. Équilibre de quoi ? d'un très petit objet, décrit "à la limite" comme ponctuel.

Pensons à un petit objet en équilibre, soumis à ses tensions internes (une balle de tennis par exemple) et essayons de faire un bilan macroscopique de ces tensions, de cette *présence*.

Il suffira de remplacer dans l'expression standard de la présence :

$$TG = \int \frac{1}{2} T^{jk} G_{jk} \text{vol}$$

la fonction lisse  $G_{jk}$  par un développement limité au voisinage d'un point  $x_0$  – par exemple l'origine ; ce qui fournira une présence  $T$  supportée par ce point. Elle sera caractérisée par les moments d'ordre 0, 1, 2, ... de la fonctionnelle  $T$  :

$$\int T^{jk} \text{vol}; \quad \int x^j T^{kl} \text{vol}; \quad A^{jk,lm} = \int x^j x^k T^{lm} \text{vol}.$$

Un théorème nous indique que les deux premiers moments sont nuls dans les conditions supposées ici (bord  $TD$  nul, support de  $T$  compact), et que le moment du second ordre  $A^{jk,lm}$  possède les symétries écrites ci-dessus<sup>(1)</sup>. Nous constatons donc qu'on devra obligatoirement utiliser un développement au second ordre au moins, et que le premier terme significatif sera effectivement le bord d'une crispation ponctuelle  $C$ , telle que nous venons

<sup>(1)</sup>Démonstration très simple les intégrales dont il faut montrer la nullité portent sur la divergence d'un vecteur à support compact.

La nullité du moment du premier ordre s'étend au cas d'un milieu en équilibre sous l'action de son propre champ de gravitation, en superposant la contrainte ordinaire et la contrainte gravitationnelle ("formule du viriel"). En prenant la trace, on trouve :

$$3 \int p \text{vol} = \frac{1}{8\pi G} \int |g|^2 \text{vol}.$$

Relation remarquable en ce sens que n'y figurent ni masses, ni masses spécifiques :  $p$  est la pression. Dans le cas de la Terre, la première intégrale est prise à l'intérieur ; la seconde, principalement localisée à l'extérieur, se trouve égale au travail qu'il faudrait fournir contre la gravitation pour disperser la planète.

de considérer<sup>(1)</sup>

$$CR = \frac{1}{4} C^{jk,lm} R_{jk,lm}(x_0)$$

avec

$$C^{jk,lm} = \frac{1}{3} [A^{jk,lm} - A^{kl,jm}]$$

D'autre part, si on choisit arbitrairement des  $C^{jk,lm}$  répartis sur une région donnée, possédant les symétries ci-dessus, la formule :

$$CR = \int \frac{1}{2} C^{jk,lm} R_{jk,lm}(x) vol$$

définit une crispation  $C$  dont le bord  $T = CD$  est une présence automatiquement en équilibre ; cette présence sera caractérisée par un tenseur de contrainte si les  $C^{jk,lm}$  sont suffisamment différentiables :

$$T^{jk} = \partial_l \partial_m A^{lm,jk}$$

Les  $C^{jk,lm}$  constituent ce que V. FOLK [*The Theory of Space Time and Gravitation*, Pergamon, 1964] appelle *tenseur de Krutkov* ; les  $A^{jk,lm}$  sont les *fonctions de contrainte*.

L'arc-boutement d'une telle présence est automatiquement nul<sup>(2)</sup> ; c'est pourquoi l'utilisation d'une fonction de contrainte pour décrire l'équilibre d'un objet "à trous" nécessite la superposition de solutions particulières capables de décrire un arc-boutement arbitraire.

## ANNEXE B. ÉTATS CONDENSÉS

Étudions le problème mathématique d'une présence  $T$ , dans un espace affine de dimension  $n$  supportée par une sous-variété  $M$  de dimension  $p$ , et dont le bord  $TD$  est nul (ce qui dans les conditions d'application du modèle peut exprimer des équations d'équilibre ou des équations du mouvement).

On met *a priori* la fonctionnelle  $T$  sous la forme :

$$TG = \int_M \frac{1}{2} [\theta^{jk} G_{jk} + \Sigma^{jkl} \partial_l G_{jk}] ds^1 \dots ds^p ;$$

<sup>(1)</sup>Exemple : pour une balle ou une bulle sphérique, on a

$$A^{jk,lm} = \frac{2\pi}{15} pR^5 [\delta^{jl} \delta^{km} + \delta^{jm} \delta^{kl} - \delta^{jk} \delta^{lm}]$$

Si le rayon  $R$  est petit et la pression intérieure  $p$  très grande, la présence de la balle tend vers le bord de la crispation ponctuelle de composantes :

$$C^{jk,lm} = \frac{2\pi}{15} \lim(pR^5) [\delta^{jm} \delta^{kl} - \delta^{jl} \delta^{km}].$$

<sup>(2)</sup>Géométriquement : l'arc-boutement d'un équilibre appartient à l'homologie de sa présence.

les tenseurs  $\theta^{jk}$  et  $\Sigma^{jkl}$  étant des fonctions différentiables sur la variété<sup>(1)</sup> ; à cause de la symétrie des  $G_{jk}$ , on peut assurer les symétries :

$$\theta^{jk} = \theta^{kj}, \quad \Sigma^{jkl} = \Sigma^{kjl}.$$

On a choisi sur la variété  $M$  des coordonnées arbitraires  $s^1, \dots, s^p$  ; la représentation paramétrique de  $M$  exprime les coordonnées spatiales  $x^j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) en fonction des  $s^\alpha$  ; nous noterons  $\delta_\alpha$  les dérivations partielles par rapport aux  $s^\alpha$ ,  ${}_\alpha U^j$  les vecteurs tangents aux lignes coordonnées de  $M$  :

$${}_\alpha U^j = \delta_\alpha x^j.$$

La condition  $TD = 0$ , c'est la nullité de  $TG$  lorsque

$$G_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j$$

les  $Z_k$ , "fonctions d'essai" définies dans tout l'espace, étant lisses à support compact.

On commence par envisager le cas où  $Z$  est nul sur la variété  $M$  ; plus précisément, on va remplacer  $Z_k$  par  $uvZ_k$ ,  $u$  et  $v$  désignant des fonctions lisses dans l'espace qui s'annulent sur la sous-variété  $M$ . Cette condition équivaut à la nullité de

$$\left[ \Sigma^{jkl} + \Sigma^{lkj} \right] \partial_j u \partial_l v$$

en tout point de  $M$  ; parce que  $M$  est une sous-variété, on peut choisir  $u$  et  $v$  pour que, en ce point,  $\partial_j u$  et  $\partial_l v$  soient des vecteurs orthogonaux à  $M$  arbitraires. Alors cette condition devient purement algébrique, et la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de la transcrire sous la forme suivante :

il existe deux tenseurs mixtes<sup>(2)</sup>  ${}_\alpha S^{kl}$  et  ${}_\alpha T^{jk}$ , possédant les symétries :

$${}_\alpha S^{kl} = -{}_\alpha S^{lk}, \quad {}_\alpha T^{kj} = {}_\alpha T^{jk}$$

qui engendrent le tenseur  $\Sigma$  par la formule :

$$\Sigma^{jkl} = {}_\alpha U^j {}_\alpha S^{kl} + {}_\alpha U^k {}_\alpha S^{jl} + {}_\alpha U^l {}_\alpha T^{jk}$$

Le dernier terme  ${}_\alpha U^l {}_\alpha T^{jk}$  produit dans la présence l'expression :

$$\int_M {}_\alpha U^l {}_\alpha T^{jk} \partial_l G_{jk} ds^1 \dots ds^p$$

or

$${}_\alpha U^l {}_\alpha T^{jk} \partial_l G_{jk} = \delta_\alpha \left[ {}_\alpha T^{jk} G_{jk} \right] - \left[ \delta_\alpha {}_\alpha T^{jk} \right] G_{jk}$$

et  $\delta_\alpha \left[ {}_\alpha T^{jk} G_{jk} \right]$  donne une contribution nulle à l'intégrale ; si bien qu'on peut faire disparaître la contribution du tenseur  ${}_\alpha T^{jk}$  à la fonctionnelle  $T$  en faisant au tenseur  $\theta^{jk}$  la correction  $-\delta_\alpha {}_\alpha T^{jk}$ .

<sup>(1)</sup>Pour fixer les idées. D'autres hypothèses seraient nécessaires pour décrire par exemple des objets rugueux ou des tissus.

<sup>(2)</sup>Double jeu d'indices indices  $\alpha, \beta, \gamma$  relatifs à la sous-variété  $M$ , écrits à gauche et  $j, k, l$ , à droite, relatifs à l'espace ambiant.

Compte tenu de ces réductions, la nullité du bord de  $T$  s'écrit :

$$\int \left[ \theta^{jk} - \delta_\alpha^\alpha S^{kj} \right] \partial_j Z_k ds^1 \dots ds^p = 0;$$

une nouvelle substitution  $Z \rightarrow uZ$  nulle sur la variété, introduit un nouveau multiplicateur :

$$\alpha P^j$$

engendrant  $\theta^{jk}$  par la formule :

$$\frac{1}{2} \left[ \alpha U^j \alpha P^k G_{jk} + \alpha U^k \alpha P^j \right]$$

et finalement, la condition  $TD = 0$  s'exprime par le système universel :

$$TG = \int_M \alpha U^j \left[ \alpha P^k + \alpha S^{kl} \partial_l G_{jk} \right] ds^1 \dots ds^p$$

$$\delta_\alpha \left[ \alpha S^{jk} + \alpha P^j x^k - \alpha P^k x^j \right] = 0$$

$$\delta_\alpha \alpha P^j = 0$$

Dans le cas du "premier gradient", où  $S$  est supposé nul, la seconde équation montre l'existence d'un tenseur symétrique de la variété  $M$  :

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

qui détermine le tenseur  $P$  par la relation  $\alpha P^j = T^{\alpha\beta} \beta U^j$ ; le système se réduit à :

$$TG = \int_M T^{\alpha\beta} \alpha U^j \beta U^k G_{jk} ds^1 \dots ds^p$$

$$\delta_\alpha \left[ T^{\alpha\beta} \beta U^k \right] = 0$$

En général, les tenseurs  $P$  et  $S$  ne sont pas complètement définis par la seule présence  $T$ ; l'indétermination résiduelle peut se décrire par un tenseur  $\alpha \Delta^{\beta\gamma}$  de la variété  $M$ , possédant l'antisymétrie :

$$\alpha \Delta^{\beta\gamma} + \alpha \Delta^{\gamma\beta} = 0$$

il fournit des valeurs de  $P$  et  $S$  :

$$\alpha P^j = \delta_\beta \left[ \gamma U^j \gamma \Delta^{\alpha\beta} \right]$$

$$\alpha S^{jk} = \alpha \Delta^{\beta\gamma} \beta U^j \gamma U^k$$

qui donnent une présence  $T = 0$ ; ce sont donc automatiquement des solutions du système considéré, puisque ce système exprime  $TD = 0$ .

Ces solutions particulières constituent ainsi la *jauge* que l'on peut ajouter à chaque solution des équations sans modifier "l'interprétation physique" – à savoir la présence.

Cette jauge est nulle dans le cas  $p = 1$  où  $M$  est une courbe ; elle est maximale dans le cas  $p = n$ , en ce sens qu'on peut en profiter pour annuler le tenseur  $S$  ; il ne reste alors que les équations standard des "milieux continus".

## CONCLUSION

L'invariance affine permet de dégager un *premier niveau* de la physique. Niveau très primitif en apparence, puisque le temps et l'espace ne s'y distinguent en rien l'un de l'autre ; que les distances et les durées n'y figurent pas. Une seule *équation aux dimensions* : celle de la force, de la masse, de l'impulsion, de l'énergie, etc.

Et pourtant c'est dans ce premier niveau que s'inscrivent toutes les équations fondamentales d'équilibre et de mouvement ; il permet de faire l'inventaire de la mécanique des divers "états" de la matière : *états condensés* d'autre part : *points matériels, particules à spin, fils, poutres, membranes, coques*, etc : *milieux continus* d'autre part. Dans chaque cas, les équations fondamentales fournissent une description détaillée des efforts internes et des effets d'inertie que la matière peut subir. Des exemples significatifs ont été traités.

C'est au second niveau que peuvent apparaître les diverses "lois de comportement".

Et c'est à ce second niveau seulement que s'exprime la distinction entre *mécanique classique* et *mécanique relativiste* : tous les résultats du premier niveau leur sont communs, la définition de la *masse*, par exemple.

C'est parce que l'énergie est reléguée à ce second niveau que les équations du premier niveau sont valables aussi bien pour les *processus dissipatifs* que pour les *processus conservatifs*.

Cette partition de la mécanique en deux parties – objective puisque reposant sur l'existence d'un groupe d'invariance – s'inscrit dans un débat permanent entre deux conceptions de la science mécanique.

D'un côté la "Mécanique Analytique". "Variationnelle" ou "Symplectique". Elle régit la plus grande partie de la Mécanique Céleste ; c'est elle qui permet le passage à la Mécanique Statistique classique, à la Mécanique Quantique (via la *quantification géométrique*).

De l'autre côté, disons (faute de mieux) la "Mécanique Physique". Son objet est surtout la description des milieux "réels", dissipatifs, visqueux, plastiques, etc. C'est la mécanique "non holonome", celle qui permet de décrire des choses révoltantes pour les tenants de la Mécanique Analytique, un pneu par exemple. La mécanique des praticiens, le plus souvent.

Mais les objets de la Nature participent à la fois de l'une et de l'autre Mécanique ; le premier niveau décrit ici n'est pas seulement un niveau "pratique" : il contient par exemple la dynamique des particules à spin ; et sa formulation suit de très près une discipline que les praticiens jugent souvent

totalemment "abstraite" et à l'opposé de leurs préoccupations : la Relativité Générale<sup>(1)</sup>.

Comment se fait-il qu'un point de vue unitaire, (qui serait nécessairement une véritable *Thermodynamique*), ne soit pas encore venu couronner le tableau ? Mystère...

CENTRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE, CNRS MARSEILLE, FRANCE

---

<sup>(1)</sup>On y trouve comme ici le tenseur  $T^{\mu\nu}$ , jouant le rôle de *source* du champ de gravitation ; l'équation du mouvement  $TD = 0$  est alors une condition de compatibilité de l'équation de champ d'Einstein. Le niveau relatif de la mécanique affine et de la Relativité Générale se précise en notant que le groupe de covariance de la relativité générale, le groupe lisse, contient le groupe affine (introduction).