

THERMODYNAMIQUE ET GÉOMÉTRIE

JEAN-MARIE SOURIAU

RÉSUMÉ. La mécanique classique ou relativiste peut se formuler en termes de géométrie symplectique ; cette formulation permet un énoncé rigoureux des principes de la mécanique statistique et de la thermodynamique.

Mais cette analyse met en évidence quelques difficultés fondamentales, qui restent cachées, dans le discours traditionnel, par une certaine ambiguïté.

Le « premier principe » de la thermodynamique peut échapper à cette ambiguïté à condition d'accepter un détour par le principe de relativité générale et par les équations d'Einstein de la gravitation. Les outils mathématiques utilisés sont la théorie des moments symplectiques, certaines formules cohomologiques et la notion de tenseur-distribution.

En ce qui concerne le second principe, nous nous contentons de montrer comment il est possible, en acceptant un certain statut géométrique pour la température et l'entropie, de construire un modèle relativiste de fluide dissipatif apte à décrire des situations expérimentales assez diverses (équilibres accélérés, transitions de phase, viscosité, conductivité thermique). Dans l'approximation du fluide parfait, nous établissons certains résultats : extension relativiste des théorèmes d'Helmholtz et Ertel concernant les mouvements non isentropiques, étude géométrique des ondes de choc.

1. FORMULATION SYMPLECTIQUE DE LA DYNAMIQUE

Considérons d'abord un cas élémentaire de système dynamique : un point matériel newtonien, de masse m , de position \mathbf{r} , de vitesse \mathbf{v} , soumis à un champ de forces $(\mathbf{r}, t) \mapsto \mathbf{F}$ ¹ ; le triplet $y = (\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ constitue une condition initiale d'un mouvement x ; y parcourt une variété V^7 (espace d'évolution) ; si on pose

$$(1.1) \quad \sigma_V(dy)(\delta y) = \langle m d\mathbf{v} - \mathbf{F} dt, \delta \mathbf{r} - \mathbf{v} \delta t \rangle - \langle m \delta \mathbf{v} - \mathbf{F} \delta t, d\mathbf{r} - \mathbf{v} dt \rangle$$

d et δ étant deux variations arbitraires, les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 , on définit sur V^7 une 2-forme σ_V de rang 6 ; les équations du mouvement s'écrivent $dy \in \ker(\sigma_V)$ ² : si \mathbf{F} dérive d'un potentiel, σ_V est

Date: 1978.

1991 Mathematics Subject Classification. 82A30 (58F05).

¹Sauf mention explicite, toutes les fonctions que nous considérerons dans ce travail seront supposées de classe C^∞ ; en particulier donc $(\mathbf{r}, t) \mapsto \mathbf{F}$.

² C 'est-à-dire $\sigma_V(dy)(\delta y) = 0, \forall y : c$ 'est le principe de d'Alembert généralisé.

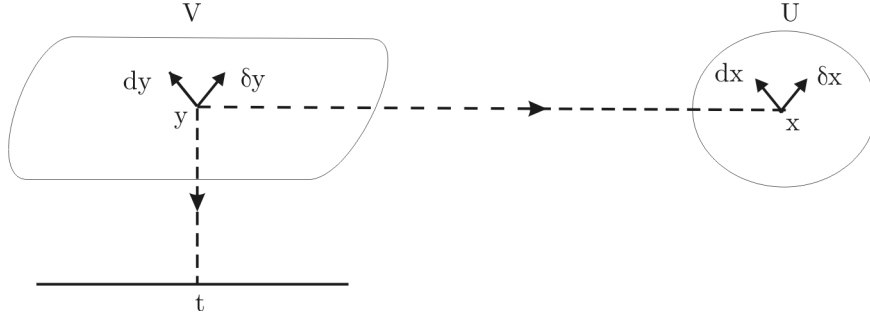


FIG. 1.

une forme *fermée* (sa dérivée extérieure est nulle) : σ_V est donc un invariant intégral absolu des équations du mouvement, découvert par E. Cartan, mais en fait déjà explicitement décrit par Lagrange. L'ensemble U des mouvements possibles possède alors une structure de *variété symplectique* (de dimension 6), muni de la 2-forme fermée et inversible σ_U dont l'image réciproque par la submersion $y \mapsto x$ coïncide avec σ_V (Figure 1).

Un tel schéma s'étend aux systèmes dynamiques généraux (systèmes de particules, particules à spin, mécanique relativiste, etc. ; voir [9]) : dans tous ces cas, l'espace U des mouvements est une variété symplectique (donc de dimension paire) sur laquelle se projette l'espace d'évolution V ; chaque section $t = Cte$ de V est un « espace de phases » ; mais l'identification des espaces de phases correspondant à des dates différentes est une opération arbitraire, dépendant du choix d'un référentiel, qu'il vaut donc mieux éviter.

2. FORMULATION SYMPLECTIQUE DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

Dans cette représentation, un *état statistique* μ est simplement une loi de probabilité définie sur U (c'est-à-dire une mesure positive de masse 1) ; l'ensemble $Prob(U)$ de ces lois de probabilité est un ensemble convexe, dont les *points extrémaux* sont les mouvements classiques x (identifiés aux mesures de Dirac correspondantes). (Figure 5).

Les états complètement continus sont caractérisés par une *densité* de U , produit de la *densité de Liouville*¹ par un scalaire ρ qui s'identifie avec la *fonction de répartition* classique². On appelle *entropie* d'un état statistique μ la valeur moyenne S de $-\text{Log } \rho$ dans cet état on peut définir une bonne classe d'états, les « états de Boltzmann » [12], constituant un sous convexe

¹Une *densité sur une variété* est une fonction f définie sur les repères R et vérifiant $f(RM) = f(R)|\det(M)|$ pour toute matrice M ; sur une variété symplectique, il existe une densité f_0 - la densité de Liouville - telle que $f_0(R) = 1$ pour tout repère canonique. On peut définir l'intégrale d'une densité à support compact sur une variété indépendamment de tout système de coordonnées ; ce qui permet d'identifier chaque champ de densités avec une mesure.

²Par construction, ρ est une fonction définie sur U , qui se relève donc sur V par une intégrale première des équations du mouvement ; si on choisit une identification des divers espaces de phases, ceci implique que ρ est solution de l'*équation de Liouville*.

de $Prob(U)$, pour lesquels l'intégrale de $-\text{Log } \rho$ converge ; $\mu \mapsto S$ est une *fonction concave* sur ce convexe.

3. LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

La mécanique statistique, telle qu'elle vient d'être décrite, est apte à décrire certains phénomènes réels - mais pas les phénomènes dissipatifs (frottement, conduction de chaleur, viscosité, etc.), qui sont l'objet de la thermodynamique. Les « deux principes » de la thermodynamique ne s'appliquent en fait qu'à une situation idéalisée : les transitions dissipatives, dans lesquelles un système est situé dans un état statistique μ_{in} *avant* les phénomènes dissipatifs, et aboutit à un nouvel état statistique μ_{out} *après*. Le second principe (Carnot-Clausius) s'écrit alors

$$(3.1) \quad S(\mu_{out}) \geq S(\mu_{in})$$

alors que le premier principe exprime la *conservation de la valeur moyenne de l'énergie E* ; ce qui s'écrit

$$(3.2) \quad \mu_{out}(x \mapsto E) = \mu_{in}(x \mapsto E)$$

en considérant les mesures comme des fonctionnelles linéaires. μ_{in} et μ_{out} appartiennent tous deux au convexe des états de Boltzmann donnant une valeur moyenne donnée Q à l'énergie. Sur ce convexe, il peut arriver que la fonction concave S soit bornée ; soit alors S_Q sa borne supérieure. On a évidemment

$$(3.3) \quad S(\mu_{in}) \leq S(\mu_{out}) \leq S_Q$$

ce qui majore la *production d'entropie* $S(\mu_{out}) - S(\mu_{in})$ par $S_Q - S(\mu_{in})$, connue en fonction de μ_{in} seulement. Il peut arriver en particulier que le maximum de S sur ce convexe soit atteint en un point unique μ_0 , appelé *état de Gibbs* ; si $S(\mu_{in}) = \mu_0$, la production d'entropie est nulle, et $S(\mu_{out}) = \mu_{in}$: les états de Gibbs ne peuvent pas subir de phénomènes dissipatifs ; ils constituent ce qu'on appelle les *équilibres thermodynamiques*.

4. FORMULATION COVARIANTE DU PREMIER PRINCIPE

L'analyse précédente s'applique aux systèmes conservatifs ; la fonction $x \mapsto E$, définie sur la variété symplectique U , permet par le formalisme hamiltonien de définir un groupe à un paramètre de symplectomorphismes de U ¹ ; le calcul montre que ce groupe se relève sur l'espace d'évolution V

¹Un champ de vecteurs \mathbf{F} défini sur une variété séparée U peut s'associer à l'équation différentielle $\frac{dx}{ds} = \mathbf{F}(x)$; la solution de cette équation, prenant la valeur x_0 pour $s = 0$, se note $\exp(s\mathbf{F})(x_0)$; si elle existe pour tout $x_0 \in U$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on dit que \mathbf{F} est complet ; alors $s \mapsto \exp(s\mathbf{F})$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe des difféomorphismes de U . Si U est symplectique, et si $x \mapsto u$ une fonction C^∞ sur U , on appelle *gradient symplectique* de la variable dynamique u le champ de vecteurs \mathbf{F} défini par $\sigma(\delta x)(\mathbf{F}(x)) = du(\delta x)$, $\forall \delta x$; l'équation associée est l'équation de Hamilton ; les $\exp(s\mathbf{F})$ préservent la forme symplectique σ et s'appellent donc symplectomorphismes.

par le groupe des translations temporelles ; soit, dans le cas d'une particule

$$(4.1) \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}, \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, t \mapsto t + Cte$$

ce qu'en exprime assez incorrectement en disant que « le temps et l'énergie sont des variables conjugués »¹. Il est clair que ces translations (4.1) sont liées à un référentiel particulier : le premier principe, tel qu'il est énoncé, ne respecte pas la covariance relativiste, même galiléenne² ; il doit donc exister un énoncé ne présentant pas cet inconvénient. Une solution radicale consiste à remplacer le groupe (4.1) par le *groupe de Galilée*³ tout entier ; ou bien, si on veut faire de la mécanique relativiste, par le *groupe de Poincaré*⁴.

L'action de ces groupes sur U par symplectomorphismes se définit naturellement si le système dynamique est isolé ; sinon, on considère un système partiel auquel le « mécanisme » constitué par le système extérieur donné ne laisse que la symétrie correspondant à un sous-groupe du groupe de Galilée (resp. de Poincaré) : par exemple une boîte immobile contenant un gaz - qui ne lui accorde que le sous-groupe (4.1) ; mais aussi une centrifugeuse, etc.

Soit donc G le groupe de symétries ; nous cherchons un objet qui joue par rapport à G le même rôle que l'énergie par rapport au groupe (4.1). Il suffit pour cela de considérer *tous les sous-groupes à un paramètre* de G ; chacun d'eux sera caractérisé par un élément Z de l'*algèbre de Lie* \mathfrak{g} de G ; il lui correspondra un hamiltonien que nous noterons $M(Z)$. L'examen de la situation montre que l'on peut choisir la constante additive qui figure dans chaque hamiltonien de façon que la correspondance $Z \mapsto M(Z)$ soit linéaire ; M devient donc une forme linéaire sur \mathfrak{g} donc un élément de son *dual* \mathfrak{g}^* ; il existe donc une application $x \mapsto M$ de U dans \mathfrak{g}^* ; la variable M s'appellera *moment* du groupe ; naturellement, nous remplacerons le premier principe (3.2) par l'énoncé [8]

$$(4.2) \quad \mu_{out}(x \mapsto M) = \mu_{in}(x \mapsto M)$$

sans changer le second principe (3.1) ; les conclusions sont analogues. Sur le convexe des états de Boltzmann vérifiant $\mu(x \mapsto M) = Q$ ⁵, il peut exister un « état de Gibbs » μ_Q , possédant la plus grande entropie S_Q ; comme précédemment, on obtient une majoration de la production d'entropie dans une transition dissipative, et on constate que les états de Gibbs ne sont plus susceptibles de phénomènes dissipatifs.

La fonction de distribution de ces états de Gibbs est l'exponentielle d'une fonction affine de M , ce qui s'écrit

$$(4.3) \quad \rho = e^{M\Theta - z}$$

¹Avec les conventions de signe usuelles, il faut remplacer E par $-E$.

²De façon précise, ces transformations (4.1) définissent un sous-groupe du groupe de Galilée qui *n'est pas* un sous-groupe invariant.

³C'est le groupe de Lie, de dimension 10, engendré par les translations temporelles $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{a}t, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}t$.

⁴Le groupe des isométries de l'espace de Minkowski. il est aussi de dimension 10.

⁵ Q est un élément de \mathfrak{g}^* qui généralise la « chaleur » usuelle.

Θ étant un élément de \mathfrak{g} (la « température géométrique »), z un nombre (le « potentiel thermodynamique de Planck » ; voir [6]) que l'on obtient en fonction de Θ en écrivant que la masse de μ vaut 1, ce qui donne

$$(4.4) \quad z = \text{Log} \int_U e^{M\Theta} \lambda(x) dx$$

λ étant la mesure de Liouville ; z est une fonction *convexe* de Θ qui se trouve être la *transformée de Legendre* de $Q \mapsto -S_Q$:

$$(4.5) \quad dQ\Theta = -dS, \quad Qd\Theta = dz, \quad Q\Theta = z - S.$$

Toutes les formules classiques de la thermodynamique sont ainsi généralisées ; mais maintenant les variables sont pourvues d'un statut géométrique. Par exemple, la « température géométrique » Θ , élément de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée ou de Poincaré, s'interprète comme *champ de vecteurs de l'espace-temps* ; dans la version relativiste, $\Theta(x)$ est un vecteur du *genre temps* ; son sens caractérise la « flèche du temps » ; sa direction est la quadri-vitesse du référentiel d'équilibre ; sa longueur (Minkovskienne) est $\beta = 1/kT$ (k : constante de Boltzmann, T température absolue). Ce vecteur-température avait été proposé par Planck pour étudier la thermodynamique relativiste ; mais son correspondant galiléen est tout aussi pertinent.

Les formules auxquelles on est ainsi conduit s'appliquent correctement à un certain nombre de situations réelles : équilibre de particules à spin, centrifugeuses, rotation des corps célestes, etc.

De plus, il apparaît des relations d'un type nouveau, liées à la *noncommutativité* du groupe G , qui permettent certaines prédictions ; ainsi, sous des hypothèses faibles, on prévoit l'existence d'une température critique pour un système isolé, au-dessus de laquelle il n'existe plus aucun équilibre ; ce fait joue probablement son rôle en astrophysique (supernovae). Pour plus de détails, nous renvoyons à [9] et [12].

5. SUSCEPTIBILITÉ GRAVITATIONELLE

La formulation covariante (4.2) du premier principe fait donc disparaître un paradoxe, tout en augmentant la valeur pratique de la thermodynamique. Mais elle laisse ouvert un problème conceptuel.

Lors d'une transition dissipative, la mécanique statistique est nécessairement violée, puisque $\mu_{out} \neq \mu_{in}$; la variable dynamique. énergie (ou plus généralement le-moment) *change de spectre pendant la transition*¹. Puisqu'on ne peut plus invoquer les lois de conservation de la mécanique classique ou statistique, il faut faire appel à *d'autres lois de la nature* pour comprendre comment celle-ci *conserve* la valeur moyenne de l'énergie, ou même simplement comment elle la *mémore*.

¹En mécanique statistique non quantique, le *spectre* d'une variable dynamique u dans un état statistique μ est l'*image* par $x \mapsto \mu$ de la loi de probabilité μ ; c'est une loi de probabilité de \mathbb{R} (ou de \mathfrak{g}^* dans le cas du moment).

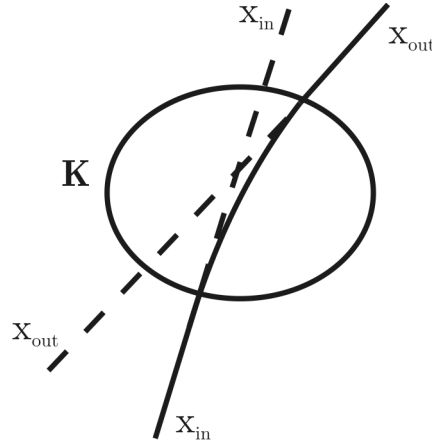


FIG. 2.

De façon inattendue, la réponse est fournie par la relativité générale ; nous verrons comment au §7, après l'étude de notions préliminaires. Considérons un système dynamique qui évolue dans un champ de gravitation, champ qui est caractérisé en relativité générale par ses *potentiels* $g_{\mu\nu}$; l'espace des mouvements est toujours une variété symplectique U , dont la structure dépend du champ.

Choisissons maintenant un compact K de l'espace-temps E_4 (Figure 2), dans lequel nous perturbons les $g_{\mu\nu}$. Le nouvel espace des mouvements U' est encore une variété symplectique, que l'on peut rattacher à U par la technique de la diffusion ; technique que nous allons décrire dans le cas d'une particule sans spin, dont le mouvement est caractérisé par la ligne d'univers ; si celle-ci ne rencontre pas K , elle caractérise aussi bien un mouvement dans U qu'un mouvement dans U' .

Considérons maintenant un mouvement dans U , que noterons x_{in} dont la ligne d'univers pénètre à un certain moment dans K ; avec les potentiels perturbés, elle sera déviée par rapport au mouvement initial (figuré en pointillé) ; lorsqu'elle ressort de K , elle emprunte un nouveau chemin qui s'identifie à un élément x_{out} de U ; la correspondance $x_{in} \mapsto x_{out}$, qui caractérise globalement la *diffusion gravitationnelle*, est un symplectomorphisme local de U (parce que U et U' sont chacune symplectique, et que leur structure peut être obtenue en partant du même espace d'évolution). Un tel objet peut se caractériser au moyen d'une certaine-variable dynamique, l'eikonal de diffusion.

Nous nous intéressons ici à la *diffusion infinitésimale* : si on donne aux $g_{\mu\nu}$ une variation $\delta g_{\mu\nu}$ nulle en dehors de K , le mouvement initial subira un déplacement $\delta x = F(x)$, qui dérive d'un certain hamiltonien φ (voir le §4) ; φ défini ainsi à une constante additive près, peut être déterminé complètement en le prenant nul sur les chemins qui ne rencontrent pas K ¹.

¹Une autre méthode, qui évite certaines difficultés topologiques, fait appel à l'algorithme de la préquantification (voir [12]).

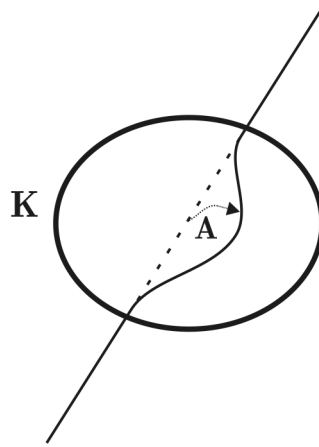


FIG. 3.

Pour tout mouvement $x \in U$, notons \mathcal{T}_x l'application qui fait correspondre ce nombre φ au champ de tenseurs $x \mapsto \delta g$ ($x \in E_4$) ; \mathcal{T}_x est une application linéaire, donc a priori une *distribution*¹ ; la connaissance de \mathcal{T}_x permet de prévoir la réaction de la particule à toute « petite » modification du champ de gravitation : c'est pourquoi nous dirons que \mathcal{T}_x est la *susceptibilité gravitationnelle* de la particule dans le mouvement x .

Utilisons maintenant le *principe de relativité générale* affirme qu'un *diffeomorphisme* A de l'espace-temps E_4 , agissant simultanément sur les potentiels (selon les formules standard de la géométrie différentielle) et sur le mouvement (ici par image directe de la ligne d'univers) est *inobservable* (voir [10]). Choisissons A tel qu'il laisse fixe les points extérieurs au compact K (Figure 3) : il ne modifie les potentiels que dans K et son action sur la particule laisse fixes les parties de la ligne d'univers qui sont extérieures à K : la diffusion gravitationnelle correspondante est donc *nulle*.

Appliquons ce résultat au cas $A = \exp(sF)$ (voir le §4), $s \in \mathbb{R}$, $F =$ champ de vecteurs nul en dehors de K . On voit que $\mathcal{T}_x(x \mapsto \delta g)$ est nul si δg est la dérivée par rapport à s , pour $s = 0$, de l'image réciproque par A de $x \mapsto \delta g$; cette variation est, par définition, la *dérivée de Lie* de g associée au champ de vecteurs $\delta x = F(x)$; nous la noterons $\delta_L g$.

Nous dirons, plus généralement, qu'une distribution \mathcal{T} est *eulérienne* si elle vérifie la condition

$$(5.1) \quad \mathcal{T}(x \mapsto \delta_L g) = 0 \quad \text{pour tout champ } x \mapsto \delta x \text{ à support compact}$$

et nous savons donc que $x \mapsto \mathcal{T}_x$ est une application de l'espace des mouvements U dans l'espace vectoriel des distributions eulériennes de E_4 (Figure 5). Sous certaines hypothèses, une distribution eulérienne permet d'associer une grandeur conservée à tout vecteur de Killing Z de la métrique g ² ; nous

¹La variable d'essai $x \mapsto \delta g$ étant un champ de tenseurs (covariants), on dit que \mathcal{T}_x est un *tenseur-distribution* (contravariant).

² Z est dit *vecteur de Killing* si $\exp(sZ)$ est une isométrie $\forall s$.

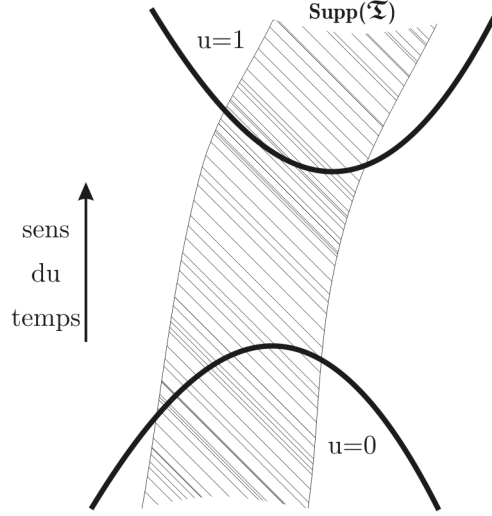


FIG. 4.

décrivons sommairement cette procédure dans le cas où E_4 est l'espace de Minkowski, et par conséquent Z un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré ; la grandeur qui lui est associée est

$$(5.2) \quad I = \mathcal{T}(x \mapsto \delta_L g) \quad \text{avec} \quad \delta x = uZ(x)$$

u étant une fonction que l'on choisit nulle dans le passé, égale à 1 dans le futur (Figure 4).

Contrairement à ce qu'on pourrait croire à l'examen de (5.1) et (5.2), I n'est pas nécessairement nulle, parce que $x \mapsto uZ(x)$ n'est pas un champ à support compact ; mais la condition eulérienne (5.1) permet de montrer que I ne dépend pas du choix de u , en faisant quelques hypothèses sur le comportement à l'infini de \mathcal{T} ¹.

On peut donc calculer I en faisant sauter u de 0 à 1 dans un petit voisinage d'une surface du genre espace ; l'indépendance du résultat par rapport au choix de cette surface exprime le caractère de « grandeur conservée » de I .

Il est clair que l'application $Z \mapsto I$ ainsi définie est linéaire ; elle associe donc à \mathcal{T} un élément $\Psi(\mathcal{T})$ du dual \mathfrak{g}^* de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Poincaré. Il est immédiat que l'application

$$(5.3) \quad x \mapsto M = \Psi(\mathcal{T}_x)$$

est un *moment* du groupe de Poincaré (§4) ; nous allons en trouver une autre propriété par des considérations d'*équivariance*.

¹La plus simple est de supposer le support de \mathcal{T} est compact dans l'espace, c'est-à-dire que sont intersection avec toute tranche temporelle $t_0 \leq t \leq t_1$, t étant la date dans un référentiel de Lorentz arbitraire, est compacte. Cette condition est vérifiée pour les \mathcal{T}_x que nous avons construit en considérant une particule (à condition que celle-ci ne soit pas un tachyon !).

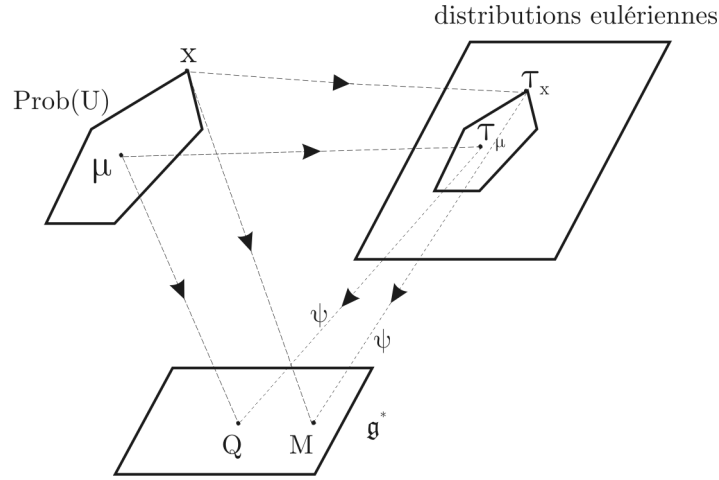


FIG. 5.

Il est clair que le groupe de Poincaré G agit sur les champs de tenseurs à support compact, donc sur les tenseurs-distributions selon la formule

$$(5.4) \quad a(\mathcal{T})(a(x \mapsto \delta g)) = \mathcal{T}(x \mapsto \delta g) \quad \forall a \in G .$$

Il agit aussi sur les champs de vecteurs à support compact, et la dérivée de Lie de g est équivariante pour cette action, si bien que G agit sur les distributions eulériennes. Enfin G agit sur les vecteurs de Killing, et cette action coïncide avec la *représentation adjointe* de G sur \mathfrak{g} .

Supposons maintenant que a soit un élément du sous-groupe orthochrone $G \uparrow^1$; les constructions précédentes montrent facilement que :

$$(5.5) \quad \Psi(a(\mathcal{T}))(a(Z)) = \Psi(\mathcal{T})(Z)$$

et que

$$(5.6) \quad a(\mathcal{T}_x) = \mathcal{T}_{a(x)}$$

d'où

$$(5.7) \quad \Psi(\mathcal{T}_{a(x)})(a(Z)) = \Psi(\mathcal{T}_x)(z).$$

Cette formule possède une interprétation *cohomologique* : elle exprime la nullité d'un certain cocycle symplectique, et entrain (cf. [8])

$$(5.8) \quad m([Z, Z'])(x) = \sigma(Z(x))(Z'(x)) \quad \forall Z, Z' \in \mathfrak{g}$$

Cette formule permet de fixer la constante arbitraire qui figurait dans M . (parce que l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est égale à son algèbre

¹La composante connexe de l'élément neutre d'un groupe de Lie est un sous-groupe invariant ; le quotient par ce sous-groupe est le *groupe des composantes*. Dans le cas du groupe de Poincaré, le groupe des composantes est le groupe de Klein à 4 éléments qui est abélien. Les éléments qui « respectent le sens du temps » constituent la réunion de deux composantes ; ils constituent donc un sous-groupe invariant, le groupe orthochrone,

dérivée); elle montre en particulier, si Z est une translation temporelle infinitésimale, que l'intégrale I (5.2) est égale à l'énergie relativiste $E = mc^2$ du système dans le mouvement considéré.

Nous avons donc *factorisé* l'application « moment » $x \mapsto M$ par la composition de $x \mapsto \mathcal{T}_x$ et de $\mathcal{T}_x \mapsto M$ (Figure 5); c'est ce résultat qui va être essentiel pour la thermodynamique.

Indiquons les résultats détaillés dans le cas de la particule; la forme symplectique (1.1) devient, en relativité générale

$$(5.9) \quad \sigma_V(dy)(\delta y) = m g_{\mu\nu} [dx^\mu \widehat{\delta}u^\nu - \delta x^\mu \widehat{d}u^\nu]$$

ici une condition initiale y est un couple (x, U) , x appartenant à la ligne d'Univers, U étant le vecteur unitaire tangent, chapeaux $\widehat{\delta}$ désignent une dérivation covariante.

Le calcul de la susceptibilité gravitationnelle, assez technique, donne

$$(5.10) \quad \mathcal{T}_x(x \mapsto \delta g) = \int \frac{1}{2} m \delta g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dX^\nu}{ds} ds$$

$s \mapsto x$ étant une paramétrisation arbitraire de la ligne d'univers de la particule (du passé vers le futur). On voit que la distribution \mathcal{T}_x est ici une *measure*, ayant pour support cette ligne d'univers. Il se trouve que l'on connaît *toutes* les mesures eulériennes supportées par une courbe; elles s'écrivent

$$(5.11) \quad \mathcal{T}(x \mapsto \delta g) = \int \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} P^\mu \frac{dX^\nu}{ds} ds$$

avec les conditions supplémentaires

$$(5.12) \quad \frac{dX}{ds} \text{ parallèle à } P, \quad \widehat{\frac{dX}{ds}} = 0$$

(on trouvera la démonstration dans [10]); ces conditions impliquent que la courbe est une géodésique - fait bien connu pour les particules, que l'on trouve aussi en utilisant le principe de d'Alembert $dy \in \ker(\sigma_V)$ à la forme (5.9). La quadri-impulsion $P = mU$ apparaît donc comme un élément de la susceptibilité gravitationnelle; dans le cas de l'espace de Minkowski, la grandeur conservée associée à un élément Z de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Poincaré est

$$(5.13) \quad I = g_{\mu\nu} P^\mu Z^\nu(x)$$

x étant choisi arbitrairement sur la ligne d'univers; en faisant varier Z dans on met en évidence l'énergie, l'impulsion, le moment orbital, etc.

- Les structures que nous venons de mettre en évidence sur le cas le plus simple s'étendent à des circonstances très variées :

- On peut les transposer au cas de la *mécanique classique*; on associe encore à chaque mouvement x une distribution \mathcal{T}_x ; la condition eulérienne s'exprime, non plus par une dérivée de Lie, mais par une certaine *connexion* qui prend en compte le champ de gravitation sous sa forme newtonienne. On remarque que les grandeurs conservées associées au cas du champ nul font apparaître une algèbre de Lie de dimension 10 qui *n'est pas* celle du

groupe de Galilée, mais assez paradoxalement celle du *groupe de Carroll*, contraction du groupe de Poincaré lorsque l'on fait tendre la vitesse c de la lumière *vers* 0. Ce phénomène peut être rapproché de l'impossibilité, pour les moments-du groupe de Galilée, d'être choisis de façon à vérifier la formule (5.8) : il apparaît une obstruction qui est une classe de cohomologie symplectique, et qui est mesurée par la *masse* totale du système - donc non nulle.

Physiquement, ces fait indiquent eue, dans la formulation oar distribution eulérienne de la mécanique classique, la *masse cache l'énergie*.

- On peut traiter par la même méthode les *particules à spin*, aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique relativiste. La susceptibilité gravitationnelle met en jeu, à côté de la quadri-impulsion P^μ , le *tenseur de spin* antisymétrique $S^{\mu\nu}$,

- Cette méthode permet d'obtenir - simplement les règles de *collision* ou de *désintégration* des particules : il suffit d'écrire que la somme des susceptibilités gravitationnelles supportées par les diverses lignes d'univers est encore une distribution eulérienne.

- Cette méthode peut s'étendre au cas de l'*électrodynamique* : On calcule la susceptibilité du système pour une variation simultanée des potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ et des potentiels électromagnétiques A_ρ ; pour les particules cette susceptibilité introduit, à coté de la quadri-impulsion et du tenseur de spin, la charge électrique et le moment magnétique. Le principe de relativité générale, qui concernait le groupe des difféomorphismes d'espace-temps, se généralise à un groupe plus grand, produit semi-direct du précédent par le groupe des transformations de jauge électromagnétiques ; par conséquent la condition eulérienne devient

$$(5.14) \quad \mathcal{T}(x \mapsto (\delta g, \delta A)) = 0 \quad \text{si} \quad \delta g = \delta_L g, \quad \delta A = \delta_L A + \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$x \mapsto \delta x$ et $x \mapsto \alpha$ étant respectivement un champ de vecteurs et un champ scalaire à supports compacts. On notera que ces structures sont particulièrement simples si on les écrit sur l'espace-temps à 5 dimensions de Kaluza.

6. LOCALISATION DES ETATS STATISTIQUES

Soit μ un état statistique d'un système dynamique ; c'est-à-dire, nous l'avons vu, une loi de probabilité de la variété U des mouvements (fig.V).

Si $x \mapsto \delta g$ est une variation à support compact des potentiels de gravitation, nous savons faire correspondre à chaque mouvement $x \in U$ un hamiltonien de diffusion $\varphi = \mathcal{T}_x(x \mapsto \delta g)$; φ est une fonction de x , c'est-à-dire une variable dynamique ; nous dirons que l'État μ est *localisable* si cette fonction est μ -intégrable pour tout $x \mapsto \delta g$; nous poserons alors

$$(6.1) \quad \mathcal{T}_\mu(x \mapsto \delta g) = \int_U \mathcal{T}_x(x \mapsto \delta g) \mu(x) dx$$

cette quantité (6.1) est la *valeur moyenne* de φ dans l'état μ .

On vérifie immédiatement que :

- (1) L'ensemble des états statistiques localisables est un sous-convexe de $\text{Prob}(U)$, qui contient ses points extrémaux ;
- (2) Si μ est localisable, \mathcal{T}_μ est une *distribution eulérienne* ;
- (3) Dans le cas de l'espace de Minkowski, l'élément $\Psi(\mathcal{T}_\mu)$ de \mathfrak{g}^* (procédure du §5) est égal à la valeur moyenne Q de M dans l'état μ ; (voir la Figure 5).

Il semble que les états localisables soient les seuls que l'on rencontre dans la nature ; notamment, les *états de Gibbs* sont *localisables*.

Si l'état μ possède une fonction de distribution de classe C^∞ (sur U) \mathcal{T}_μ sera une distribution *complètement continue* (sur E_4) ; ce qui s'écrira

$$(6.2) \quad \mathcal{T}_\mu(x \mapsto \delta g) = \int_{E_4} \frac{1}{2} \delta g_{\nu\rho} T^{\nu\rho}(x) dx$$

les $T^{\nu\rho}$ étant des densités ($T^{\nu\rho} = \mathcal{T}^{\rho\nu}$) ; ces $T^{\nu\rho}$ sont les composantes d'une *densité tensorielle*, au sens de Brillouin ; on peut aussi les écrire $T^{\nu\rho}\lambda$, les $T^{\nu\rho}$ étant les composantes d'un tenseur symétrique et λ la densité riemannienne de l'espace-temps ; alors (6.2) devient

$$(6.3) \quad \mathcal{T}_\mu(x \mapsto \delta g) = \int_{E_4} \frac{1}{2} T^{\nu\rho} \delta g_{\nu\rho} \lambda(x) dx$$

la condition eulérienne (5.1) s'obtient par utilisation de la formule de Killing

$$(6.4) \quad [\delta_L g]_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \widehat{\partial}_\beta \delta x^\gamma + g_{\gamma\beta} \widehat{\partial}_\alpha \delta x^\gamma$$

on trouve facilement

$$(6.5) \quad \widehat{\partial}_\nu T^{\nu\rho} = 0$$

où l'on reconnaît l'écriture relativiste des équations d'Euler proposée par Einstein [2].

Par conséquent la localisation d'un état statistique permet d'interpréter celui-ci à l'aide d'un *milieu continu*, dont les $T^{\nu\rho}$ définis par (6.3) constituent le *tenseur d'énergie*, et sont *automatiquement* solutions des équations d'Euler. Cette interprétation peut se confirmer par un calcul détaillé ; ainsi, dans le cas d'une particule, la composante T^{00} , qui s'interprète comme *masse spécifique*, est la valeur moyenne de la masse relativiste $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ dans un élément de volume au voisinage du point x considéré ; la pression, ou plus généralement le tenseur de contraintes s'interprète comme une mesure du caractère aléatoire des vitesses des mouvements qui passent par x : etc.

- Traitons l'exemple d'un système de N particules relativistes sans spin, de masse m , constituant un équilibre de Gibbs dans une boîte de volume V , à la température T . Dans un référentiel lié à la boîte, le tenseur $T^{\nu\rho}$ est diagonal, et s'exprime au moyen d'une *masse spécifique* ρ et d'une *pression* p données par

$$(6.6) \quad \rho = \frac{Nm}{V} \frac{G''(x)}{-G'(x)} \quad p = \frac{Nm}{V} \frac{G''(x) - G(x)}{-3G'(x)}$$

où l'on a posé $x = m/kT$ et défini la fonction G par

$$(6.7) \quad G(x) = \int_1^\infty e^{-xs} \sqrt{s^2 - 1} ds$$

Il se trouve que $G(x) = \frac{K_1(x)}{x}$, K_1 étant la fonction de Bessel modifiée d'indice 1 ; G vérifie donc l'équation différentielle

$$(6.8) \quad G''(x) + \frac{3}{x}G'(x) - G(x) = 0$$

qui entraîne

$$(6.9) \quad pV = NkT ;$$

on retrouve donc *exactement* la loi classique des gaz parfaits (Boyle-Mariotte-Charles-Gay-Lussac-Avogadro-Kelvin-Boltzmann) ; les premiers termes du développement asymptotique de K_1 [14] fournissent la formule

$$(6.10) \quad Q = pV = Nm + \frac{3}{2}NkT + \frac{Nm}{-2G'(m/kT)} \int_1^\infty e^{-ms/kT} (s-1)^{5/2} (s+1)^{1/2} ds .$$

On a fait $c = 1$; le premier terme est la masse au zéro absolu ; le second est la *valeur moyenne classique de l'énergie* (qui permet de calculer la capacité calorifique du gaz monoatomique) ; le troisième, positif, donne la correction relativiste.

On obtient simultanément le potentiel thermodynamique de Planck (4.4) :

$$(6.11) \quad z = N \text{Log}(-4\pi V m^3 G'(m/kT))$$

C'est effectivement une fonction convexe de $\beta = 1/kT$; la formule (4.5) donne ensuite l'entropie ¹ (cf. [13]).

$$(6.12) \quad S = kz + \frac{Q}{T}$$

- Il est remarquable que le tenseur T^{vp} , que nous avons construit comme caractéristique de la *susceptibilité gravitationnelle*, caractérise aussi l'*action gravitationnelle* de la matière définie par l'état statistique μ ; c'est en effet lui qui figure au second membre des équations d'Einstein de la gravitation

$$(6.13) \quad R^{\text{vp}} - \frac{1}{2}Rg^{\text{vp}} + \Lambda g^{\text{vp}} = 8\pi G T^{\text{vp}}$$

($\Lambda =$ constante cosmologique ; $G =$ constante de Newton ; $c = 1$) ; en utilisant la définition (6.1), celles-ci s'écrivent

$$(6.14) \quad \int_{E_4} \delta \mathcal{L}(x) dx = \int_U \mathcal{T}_x(x \mapsto \delta g) \mu(x) dx \quad \forall \delta g$$

¹L'entropie usuelle est le produit par k de celle que nous avons utilisée ici. On peut toujours choisir une unité de température telle que $k = 1$.

\mathcal{L} désignant la densité lagrangienne du champ de gravitation

$$(6.15) \quad \mathcal{L} = \frac{2\Lambda - g^{\nu\rho} R_{\nu\rho}}{8\pi G} \lambda \quad (\lambda = \text{densité riemannienne})$$

sous cette forme, on remarque que la distribution définie par le premier membre est *automatiquement* eulérienne.

Toutes ces considérations s'étendent au cas électromagnétique ; les formules (6.5) sont alors remplacées respectivement par

$$(6.16) \quad \mathcal{T}_\mu(x \mapsto (\delta g, \delta A)) = \int_{E_4} \left[\frac{1}{2} T^{\nu\rho} \delta g_{\nu\rho} + J^\sigma \delta A_\sigma \right] \lambda(x) dx$$

et

$$(6.17) \quad \widehat{\partial}_\nu T^{\nu\rho} + F_\nu^\rho J^\nu = 0, \quad \widehat{\partial}_\sigma J^\sigma = 0$$

et les équations d'Einstein (6.13) par les équations couplées d'Einstein-Maxwell ; le quadri-vecteur J^σ s'interprète comme densité de courant-charge. L'application des formules précédentes aux états statistiques de particules à spin munies de moment magnétique permet de retrouver les principales caractéristiques du ferro-magnétisme (équivalence magnétique aimant-solénoïde en effet gyro-magnétique ; magnétostriction) (Voir [10] et [12]).

7. INTERPRETATION GRAVITATIONNELLE DU PREMIER PRINCIPE

Plaçons-nous dans le cas d'une transition dissipative $\mu_{in} \mapsto \mu_{out}$, et supposons qu'il existe une *distribution eulérienne* \mathcal{T} qui *coincide avec* μ_{in} *avant les phénomènes dissipatifs, et avec* μ_{out} *après* ; en d'autres mots, qui interpole μ_{in} μ_{out} .

Nous saurons alors associer à \mathcal{T} une grandeur conservée Q , qui prendra la même valeur que pour $\mathcal{T}_{\mu_{in}}$ ou pour $\mathcal{T}_{\mu_{out}}$ (puisque'on peut la calculer lin l out â une date arbitraire) ; nous savons aussi que pour $\mathcal{T}_{\mu_{in}}$, Q est égale à la valeur moyenne du moment M de Poincaré ; de même pour $\mathcal{T}_{\mu_{out}}$; par conséquent *le premier principe*, sous sa forme covariante (4.2), sera assuré. Or il suffit de poser (notation (6.14))

$$(7.1) \quad \mathcal{T}(x \mapsto \delta g) = \int_{E_4} \delta \mathcal{L}(x) dx ;$$

nous savons en effet que \mathcal{T} est une distribution eulérienne, et qu'elle interpole $\mathcal{T}_{\mu_{in}}$ et $\mathcal{T}_{\mu_{out}}$ puisque les équations d'Einstein (6.13) sont valables avant et après les phénomènes dissipatifs ¹.

Ce sont donc les potentiels de gravitation $g_{\nu\rho}$ qui mémorisent la valeur moyenne du moment M , et assurent la validité du premier principe (sous sa forme covariante (4.2)).

¹On remarquera que ce raisonnement utilise implicitement une approximation ; d'une part on se place en relativité restreinte pour construire les moments de Poincaré ; d'autre part on considère les $g_{\nu\rho}$ comme variables, puisqu'ils donnent par dérivation les $T^{\nu\rho}$ grâce aux équations d'Einstein. Ce niveau d'approximation revient à considérer la constante G comme petite, et à négliger la self-interaction gravitationnelle du système ; c'est l'usage en thermodynamique.

8. UN MODÈLE DE SYSTÈME DISSIPATIF

Le problème d'une géométrisation analogue du *second principe* est encore loin d'être résolu ; une voie pour y parvenir serait la construction d'un quadri-vecteur « flux d'entropie » S^μ , vérifiant

$$(8.1) \quad \widehat{\partial}_\mu S^\mu \geq 0$$

et qui, dans les états statistiques - ou au moins les états de Gibbs - vérifierait $\widehat{\partial}_\mu S^\mu = 0$ dont le flux - conservatif - à travers une hypersurface du genre espace coïnciderait avec l'entropie. Cette hypothèse a été envisagée par de nombreux auteurs (voir par exemple [5]).

Nous nous contenterons ici de construire un modèle phénoménologique de fluide dissipatif, comportant un tel vecteur, et de comparer son comportement à celui des fluides réels.

Le modèle est fondé sur les hypothèses suivantes [11] :

A. Existence, en tout point, d'un *vecteur-température* Θ ; nous poserons

$$(8.2) \quad \Theta = \beta U$$

U étant un quadri-vecteur unitaire de genre futur (la « quadri-vitesse du fluide »), $\beta = 1/kT$ la température réciproque.

Contrairement au cas des états de Gibbs (§4), Θ ne sera pas nécessairement un vecteur de Killing ; nous poserons

$$(8.3) \quad \gamma = \frac{1}{2} \delta_L g \quad \text{pour} \quad \delta x = \Theta$$

γ est un tenseur symétrique dont les composantes sont données par la formule de Killing (6.4).

B. Conservation du « nombre de particules » ; ceci étant matérialisé par un quadri-vecteur N^μ , vérifiant

$$(8.4) \quad \widehat{\partial}_\mu N^\mu = 0$$

dont le flux est conservatif. Nous supposons N parallèle à Θ en écrivant

$$(8.5) \quad N^\mu = U^\mu n \quad n \geq 0 .$$

Dans le « référentiel propre du fluide », défini par le vecteur U , n s'interprétera comme valeur moyenne du nombre de particules par unité de volume.

C. Existence d'un « potentiel d'énergie » φ ; φ sera une fonction des variables

$$U, \quad \beta, \quad n, \quad \gamma$$

telle que

$$(8.6) \quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{\mu\nu}}$$

$T^{\mu\nu}$ étant le tenseur d'énergie du fluide - celui qui figure au second membre des équations d'Einstein ¹ ; il vérifie donc les équations

$$(8.7) \quad \widehat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

D. Existence d'un « potentiel thermodynamique » ζ ; ζ est une fonction des variables

$$\beta, \quad n$$

qui définit le vecteur flux d'entropie S^μ par la formule

$$(8.8) \quad S^\mu = N^\mu \zeta + T^{\mu\nu} \Theta_\nu$$

- Il se trouve [12] que la condition (8.1)

$$(8.9) \quad \widehat{\partial}_\mu S^\mu \geq 0$$

est assurée si les potentiels φ et ζ vérifient les deux conditions

$$(8.10) \quad \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \frac{n^2}{\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} [g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu] - n \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} U^\mu U^\nu ;$$

$$(8.11) \quad \varphi \text{ est une fonction convexe de } \gamma \quad ^2$$

qui seront donc prises comme hypothèses.

Nous allons étudier trois types de mouvements du fluide.

8.1. Mouvements non dissipatifs (relativité restreinte). Si φ est strictement convexe en γ , on peut montrer que les mouvements non dissipatifs ($\widehat{\partial}_\mu S^\mu = 0$) n'existent que si $\gamma = 0$ - donc si le vecteur température est un vecteur de Killing. Dans l'hypothèse de la relativité restreinte, chacun de ces vecteurs est donné par un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré ; ce qui définit en tout point X les variables U et β ; le mouvement sera donc complètement déterminé si on connaît la seule fonction $X \mapsto n$, pour laquelle on dispose des 5 équations (8.4), (8.7), $T^{\mu\nu}$ étant donné par (8.10).

Il se trouve - grâce à l'existence d'un facteur intégrant - que ces 5 équations sont compatibles, et s'intègrent en

$$(8.12) \quad n \text{ constant sur les lignes de courant} \quad ^3$$

$$(8.13) \quad n \frac{\partial \zeta}{\partial n} + \zeta \text{ constant dans l'espace-temps.}$$

Alors le vecteur flux d'entropie est donné par

$$(8.14) \quad S^\mu = N^\mu s, \quad \text{avec} \quad s = \zeta - \beta \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} ;$$

¹Abus de notations signifiant : $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$; $\delta\varphi = T^{\mu\nu} \delta\gamma_{\mu\nu}$ si $\delta U = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta n = 0$.

²Cette seconde condition n'est pas nécessaire pour tout γ ; elle l'est cependant au voisinage de $\gamma = 0$.

la valeur de $T^{\mu\nu}$, donnée par (8.10) s'interprète dans le référentiel propre par une *masse spécifique* ρ et une *pression* p

$$(8.15) \quad \rho = -n \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \quad p = \frac{-n^2}{\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial n}$$

Les formules ci-dessus montrent que l'on peut interpréter ζ comme le *potentiel de Planck par particule*¹. En particulier, si on fait le choix correspondant au modèle de gaz monoatomique (§6)

$$(8.16) \quad = \text{Log} \left(\frac{-G'(m\beta)}{n} \right) + Cte$$

G étant la fonction définie par (6.7), on constate que l'équation (8.13) détermine n en tout point de E_4 , à partir de sa valeur en un point, et que les valeurs de *toutes* les variables coïncident avec celles qui sont données par les *états de Gibbs généralisés* pour un système de particules sans spin de même masse m : les mouvements non dissipatifs décrits par le modèle sont donc conformes aux prédictions de la mécanique statistique.

- D'autres choix phénoménologiques sont possibles pour la fonction $\zeta(\beta, n)$; si ζ n'est pas concave par rapport au *volume spécifique*.

$$(8.17) \quad U = \frac{1}{n}$$

il peut exister des *surfaces de discontinuité* de n ; en traversant cette surface, les deux variables p et $n \frac{\partial \zeta}{\partial n} + \zeta$ sont continues (8.7), prise au sens des distributions comme au §6, et (8.13) ; on trouve les conditions classiques de transition de phase (équilibre liquide-vapeur).

8.2. Approximation du fluide parfait. On négligera les phénomènes dissipatifs en remplaçant la fonction par son développement limité au premier ordre (c'est une fonction affine, donc convexe). Alors :

- la production d'entropie $\widehat{\partial}_\mu S^\mu$ est nulle ;
- le flux d'entropie conserve la valeur (8.14) ;
- le tenseur d'énergie $T^{\mu\nu}$ a la même valeur (8.10) que pour $\gamma = 0$;
- les équations (8.4) et (8.7) sont celles d'un fluide parfait (voir [7]).

Si on introduit la 1-forme

$$(8.18) \quad H_\lambda = hU_\lambda, \quad \text{avec} \quad h = \frac{P + \rho}{n} \quad 2$$

et sa dérivée extérieure

$$(8.19) \quad \Omega_{\lambda\mu} = \partial_\lambda H_\mu - \partial_\mu H_\lambda$$

¹Cette possibilité de répartir le potentiel entre les particules suppose qu'il n'existe pas d'*effet d'échelle* - donc qu'on a négligé des phénomènes comme la capillarité. Nous sommes donc dans les conditions de la *limite thermodynamique*.

²Cette seconde condition n'est pas nécessaire pour tout γ ; elle l'est cependant au voisinage de $\gamma = 0$.

on peut remplacer les équations du mouvement (8.4), (8.7) par

$$(8.20) \quad \widehat{\partial}_\lambda N^\lambda = 0 \quad , \quad \Omega_{\lambda\mu} \Theta^\mu + \partial_\lambda s = 0 .$$

Cette dernière équation montre que

$$(8.21) \quad \delta s = 0 \quad \text{et} \quad \delta_L \Omega = 0 \quad \text{pour} \quad \delta X = \Theta$$

il en résulte que s est constant sur chaque ligne de courant, et que Q est un invariant intégral du champ $X \mapsto \Theta$; son rang (4, 2 ou 0) est donc constant sur chaque ligne de courant, ainsi que le pseudo-scalaire

$$(8.22) \quad \pi = \text{pf}(\Omega) \frac{\beta}{n}$$

où $\text{pf}(\Omega)$ désigne le *pfaffien* de la forme ¹.

En général, $\pi \neq 0$, Ω est de rang 4, le signe de π définit une orientation de l'espace. Il existe aussi des classes importantes de mouvements dans lesquelles $\pi = 0$:

- Les mouvements *isentropiques* (ceux où s prend la même valeur sur toutes les lignes de courant) ; alors (8.20) montre que $\Theta \in \ker(\Omega)$; en général le rang de Ω est 2 ; le noyau de Ω définit un feuilletage dont les feuilles, de dimension 2, s'interprètent comme lignes de tourbillon emportées par le fluide. Ces mouvements sont barotropes : il existe une équation d'état, indexée par la valeur de s' , obtenue par élimination de β et n entre p et ρ : l'enthalpie particulière h (8.18) coïncide avec l'indice défini par Lichnerowicz [7].

- Les mouvements non isentropiques dans lesquels $\text{rang}(\Omega) = 2$ (il suffit que ce soit vrai à une date arbitraire) ; ils constituent l'équivalent relativiste des mouvements *oligotropes* de Casal [1] ; les feuilles de Ω sont tracées sur les hypersurfaces $s = \text{Cte}$.

- Les mouvements où $\Omega = 0$ (là aussi il suffit de le vérifier à une date arbitraire) ; (8.20) montre qu'ils sont isentropiques ; ce sont les mouvements irrotationnels, au sens de Lichnerowicz [7].

- Il existe des solutions comportant des discontinuités sur une hypersurface Σ de E_4 (*ondes de choc*) ; les conditions que l'on obtient en écrivant les équations (8.4) et (8.5) au sens des distributions sont les suivantes ²

$$(8.23) \quad \begin{aligned} N'^\lambda - N^\lambda & \text{ est tangent à } \Sigma \\ H'^\lambda - H^\lambda & \text{ est normal à } \Sigma \\ h'^2 - h^2 & = [u'h' + uh][p' - p] \end{aligned}$$

²A cause de l'équivalence relativiste entre masse spécifique et énergie spécifique (on a supposé $c = 1$), h s'interprète comme enthalpie par particule.

¹Ce pfaffien est défini par la relation $\frac{1}{2}\Omega \wedge \Omega = \text{pf}(\Omega)\text{vol}$, où vol désigne la 4-forme volume riemannienne définie à l'aide d'une orientation de E_4 . π est l'équivalent relativiste du potentiel tourbillon de Ertel [3, 4].

²Les variables portant le signe ' sont prises après le choc.

si on ajoute que la discontinuité $s' - s$ est positive, on obtient les équations de choc de Rankine-Hugoniot, sous leur forme relativiste.

8.3. Mouvements faiblement dissipatifs. On fait cette fois un développement au second ordre de $\gamma \mapsto \varphi$ au voisinage de $\gamma = 0$; on ajoute donc à la fonction affine du cas précédent une forme quadratique positive définie; cette forme quadratique s'interprète comme *fonction de dissipation* (en un sens plus large que le sens usuel). Ce que nous écrirons

$$(8.24) \quad \varphi = \varphi_0 \overset{\circ}{T}{}^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} C^{\lambda\mu, \nu\rho} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\nu\rho}$$

Les $\overset{\circ}{T}$ ayant la valeur donnée en (8.10); d'où, grâce à (8.6)

$$(8.25) \quad T^{\lambda\mu} = \overset{\circ}{T}{}^{\lambda\mu} + C^{\lambda\mu, \nu\rho} \gamma_{\nu\rho}.$$

La production d'entropie est

$$(8.26) \quad \widehat{\partial}_\lambda S^\lambda = C^{\lambda\mu, \nu\rho} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\nu\rho}$$

donc le double de la fonction de dissipation; la symétrie

$$(8.27) \quad C^{\lambda\mu, \nu\rho} = C^{\nu\rho, \lambda\mu}$$

exprime la *réciprocité d'Onsager* (le « courant généralisé » $T - \overset{\circ}{T}$ est, grâce à (8.25), fonction linéaire de la « force généralisée » γ ; les $C^{\lambda\mu, \nu\rho}$ sont les coefficients de transport).

A priori, il existe 55 coefficients $C^{\lambda\mu, \nu\rho}$ indépendants; mais la symétrie du fluide réduit ce nombre à 5¹; on interprète le résultat (8.25) en se plaçant en relativité restreinte et en calculant les composantes $T^{\lambda\mu}$ dans le référentiel propre du fluide. On obtient ainsi, avec 5 coefficients A, B, C, E, F :

a) Le tenseur de contraintes.

$$(8.28) \quad \tau_{jk} = -T_{jk} = \delta_{jk} \left[-p + \left(A - \frac{2E}{3} \right) \partial_l v^l - B \frac{\partial \beta}{\partial t} \right] + \beta E [\partial_j v_k + \partial_k v_j]$$

($j, k = 1, 2, 3$; v_j est la vitesse, nulle au point considéré).

b) Le flux de chaleur, dont les composantes sont les T^{j0} :

$$(8.29) \quad F \left[\mathbf{grad} \beta - \beta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right]$$

¹On écrit que $\gamma \mapsto \varphi$ est invariant par le stabilisateur de U dans le groupe de Lorenz (c'est-à-dire le groupe des rotations dans le référentiel propre). Sans la réciprocité d'Onsager, il y aurait 6 coefficients indépendants,

c) La masse-énergie spécifique.

$$(8.30) \quad T^{00} = \rho + C \frac{\beta}{\partial t} - B\beta \operatorname{div} \mathbf{v}$$

A, B, C, E, F sont, à priori, des fonctions de β et n ; la convexité stricte de φ s'exprime par les inégalités

$$(8.31) \quad A > 0, \quad C > 0, \quad E > 0, \quad F > 0, \quad |B| < \sqrt{AC}.$$

L'interprétation est claire : on retrouve la description de Navier-Stokes de la *viscosité*, avec les deux coefficients

$$(8.32) \quad \lambda = \left[A - \frac{2E}{3} \right] \beta, \quad \mu = E\beta$$

fonctions de la température et du volume spécifique, qui vérifient grâce à (8.31)

$$(8.33) \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0;$$

la formule (8.29), où on rappelle que $\beta = 1/kT$, donne la *conductivité thermique*

$$(8.34) \quad \frac{F}{kT^2}$$

nécessairement positive ; le second terme de (8.29) est une correction relativiste ¹.

Les coefficients C et B (ce dernier pouvant être nul) ont une interprétation plus délicate : ils modifient la conduction de la chaleur - en rendant *elliptique* le système des équations. C est peut-être mesurable expérimentalement.

9. CONCLUSION

Ce modèle est très schématique - mais cependant apte à décrire des comportements très divers des fluides réels. On peut donc penser que les méthodes géométriques peuvent contribuer aux progrès de la connaissance des phénomènes dissipatifs.

RÉFÉRENCES

- [1] P. Casal. Principes variationnels en fluide compressible et en magnétodynamique des fluides. *Journ. de Mécanique*, 5(2) :149–161, 1966.
- [2] A. Einstein. *The meaning of relativity*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988. Reprint of the 1956 edition.
- [3] Ertel. *Meteorel. Ztschr.*, 59 :277–385, 1942.

¹Ce terme montre qu'il peut exister des équilibres *non isothermes* ; ce qui est évident à priori en mécanique statistique, parce que les vecteurs de Killing de Minkowski qui ne sont pas constants n'ont pas une longueur constante. Ce qui montre en particulier que la température propre, dans une centrifugeuse, est plus grande à la périphérie qu'au bord. Cet effet est probablement sensible dans le cas des pulsars, dans l'atmosphère desquels la vitesse d'entraînement peut approcher celle de la lumière.

- [4] B.L. Gavrilin and M.M. Zaslavskii. *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, 192(1) :48–?, 1970.
- [5] W. Israel. Nonstationary irreversible thermodynamics : a causal relativistic theory. *Ann. Physics*, 100(1-2) :310–331, 1976.
- [6] A.I. Khinchin. *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*. Dover Publications Inc., New York, N. Y., 1949. Translated by G. Gamow.
- [7] A. Lichnerowicz. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Relativité générale et théories unitaires*. Masson et Cie, Paris, 1955.
- [8] J.M. Souriau. Définition covariante des équilibres thermodynamiques. *Supp. Nuovo Cimento*, 1, 4 :203–216, 1966.
- [9] J.M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.
- [10] J.M. Souriau. Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 20 :315–364, 1974.
- [11] J.M. Souriau. Thermodynamique relativiste des fluides. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino*, 35 :21–34 (1978), 1976/77.
- [12] J.M. Souriau. *Structure of dynamical systems*, volume 149 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. A symplectic view of physics, Translated from the French by C. H. Cushman-de Vries, Translation edited and with a preface by R. H. Cushman and G. M. Tuynman.
- [13] J.L. Synge. *The relativistic gas*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1957.
- [14] G.N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.